Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Diskretne strukture: prvi izpit - računski del A

19. januar 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Z uporabo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število $n > 0$ velja

$$1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}.$$

- Baza indukcije: $n = 1$ $\quad 1 = \frac{5^1 - 1}{4}$

  $1 = 1$ velja 5

- Indukcijski korak: Naj bo $n \in \mathbb{N}$
  - Predpostavimo: $1 + 5 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$ 5
  - Dokazujemo: $1 + 5 + \ldots + 5^{n-1} + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ 5
  - Računamo: $\underbrace{1 + 5 + \ldots + 5^{n-1}}_{\text{predpostavka}} + 5^n = \frac{5^n - 1}{4} + 5^n$

$$= \frac{5^n - 1 + 4 \cdot 5^n}{4}$$

$$= \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4} \qquad 10$$

$$= \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

2. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Pokaži, da sta formuli enakovredni.

$$A = \exists x \, \exists y \, (P(x) \Rightarrow Q(y)) \qquad \text{in} \qquad \forall x \; P(x) \Rightarrow \exists x \; Q(x). = B$$

Drugo formulo zapišemo v preneksni normalni obliki:

$$B = \forall x \, P(x) \Rightarrow \exists x Q(x) \sim \neg \forall x \, P(x) \vee \exists y \, Q(y)$$

$$\sim \exists x \, \neg P(x) \vee \exists y \, Q(y) \qquad 10$$

$$\sim \exists x \, \exists y \, (\neg P(x) \vee Q(y))$$

$$\sim \exists x \, \exists y \, (P(x) \Rightarrow Q(y)) = A$$

b) (15 točk) Pokaži, da formuli nista enakovredni.

$$A = \neg \exists x \, (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \qquad \text{in} \qquad \neg \exists x \; P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \; Q(x). = B$$

Definiramo:

5

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{D} = \{a\} \\ P(a) \sim 1 \\ Q(a) \sim 1 \end{array}\right\}$$

V tej interpretaciji izračunamo logično vrednost formule A in B:

5 $A \sim \neg (P(a) \Leftrightarrow Q(a)) \sim \neg(1 \Leftrightarrow 1) \sim \neg 1 \sim \underline{\underline{0}}$

5 $B \sim \neg P(a) \Leftrightarrow \neg Q(a) \sim \neg 1 \Leftrightarrow \neg 1 \sim 0 \Leftrightarrow 0 \sim \underline{\underline{1}}$

Imamo protiprimer.

Formuli nista enakovredni.

3. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definirana relacija R s predpisom:

$$(a,b)R(c,d) \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad a+b=c+d.$$

a) (9 točk) Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

$\boxed{Ref}$ $\forall (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ (a,b)R(a,b)$, ker $a+b=a+b$. ✓ 3

$\boxed{Sim}$ $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ (a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)$, ker

$a+b=c+d \Rightarrow c+d=a+b$ ✓ 3

$\boxed{Tran}$ $\forall (a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}: \ (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$,

ker $a+b=c+d \ \wedge \ c+d=e+f \Rightarrow a+b=e+f$ ✓

3

b) (5 točk) Opiši ekvivalenčni razred v katerem je element $(1,3)$.

V tem ekvivalenčnem razredu so vsi urejeni pari (a,b) za katere velja: $a+b=4$. Torej,

$[(1,3)] = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$ 5

c) (5 točk) Zapiši opis relacije R^{C}.

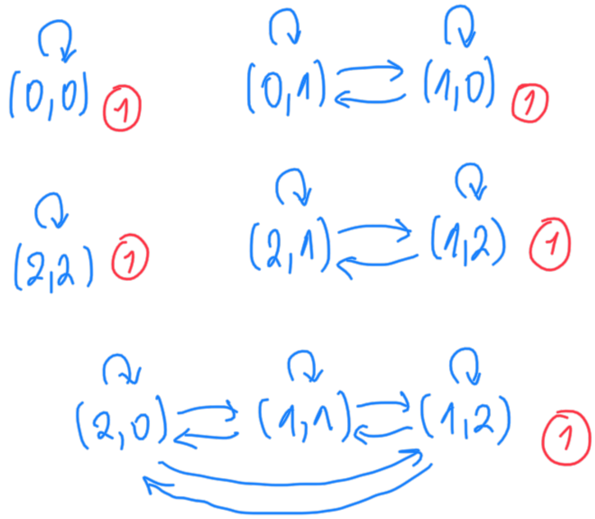
$(a,b)R^c(c,d)$ natanko tedaj, ko je $a+b \neq c+d$. 5

d) (6 točk) Denimo, da relacijo R definiramo na množici $A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ z istim predpisom. Pregledno nariši njen graf.

$A = \{(0,0),(0,1),(0,2),$
$(1,0),(1,1),(1,2),$
$(2,0),(2,1),(2,2)\}$

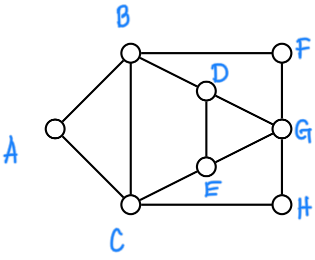
1

$\leftarrow$ 5 ekvivalenčnih razredov:

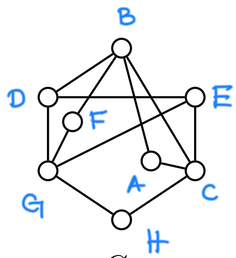


4. naloga (25 točk)

a) (7 točk) Pokaži, da sta grafa G_1 in G_2 izomorfna, tako da najdeš izomorfizem med njima.



G_1



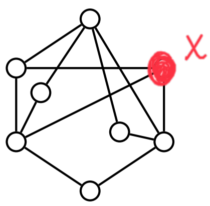
G_2

Preslikava na sliki je izomorfizem, saj ohranja sosednost vozlišč.

$G_1 \cong G_2$

7

b) (6 točk) Ali je graf G_2 Eulerjev? Če je, nariši Eulerjev obhod. Če ni, to utemelji.



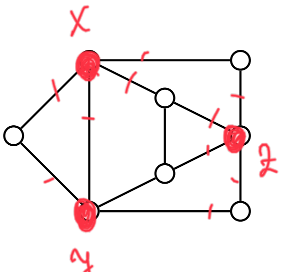
G_2

Graf G_2 ni Eulerjev, saj vsebuje vozlišče x lihe stopnje.

$\deg(x) = 3$

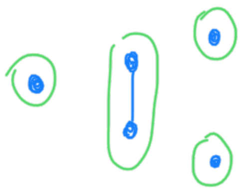
6

c) (6 točk) Ali je graf G_1 Hamiltonov? Če je, nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, to pokaži z izrekom o razpadu grafa.



G_1

$\Rightarrow$



$G_1 - S$

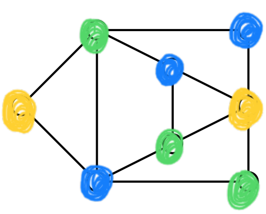
2

$S = \{x, y, z\}$ in $|S| = 3$

Graf $G_1 - S$ vsebuje 4 povezane komponente. 2

$\Rightarrow$ Graf ni Hamiltonov (po izreku o razpadu grafa) 2

d) (6 točk) Določi kromatično število grafa G_1.



G_1

2

1 $\omega(G_1) = 3$

1 $\Delta(G_1) = 4$

$\Rightarrow 3 \leq \chi(G) \leq 4$ 1

Brooks

Ker smo našli 3-barvanje grafa G_1 (na sliki), sledi $\chi(G_1) = 3$. 1