· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ____________________

1. izpit iz DS, 27.01.2020

- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in izjavni račun**

(a) [**1**] Pojasnite princip matematične indukcije.

(b) [**1**] Razvrstite izjavne veznike $\wedge, \vee, \Leftrightarrow$ glede na število 1 v resničnostni tabeli. Začnite s tistim, ki ima največ 1.

(c) [**1**] Naj bodo A, B, C izjavni izrazi. Obkrožite črke pred tistimi pari izjavnih izrazov, ki niso enakovredni za vse trojice A, B, C.

(i) $(A \wedge \neg B) \vee A,\ \neg B$ (ii) $\neg(\neg A \wedge B),\ A \vee \neg B$ (iii) $(A \vee B) \wedge C,\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(d) [**2**] Naj bo $\{\triangle, \bigcirc, \otimes\}$ nek poln nabor izjavnih veznikov, $\{\bigcirc, \sqcup, *\}$ pa nabor, ki ni poln. Pod vsakega od naslednjih nabor napiši P, če je poln, N, če ni poln, in ?, če iz podatkov ni moč določiti, ali je poln.

Pozor: za vsak pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tem delu naloge ne morete dobiti negativnega števila točka.

$$\{\triangle, \bigcirc\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup, *, \otimes\}, \qquad \{\bigcirc, \sqcup, \otimes, \triangle\}.$$

2. **[5 točk] Predikatni račun in množice**

(a) [**1**] Navedite induktivno definicijo izjavne formule. (Definicije atoma vam ni potrebno razlagati.)

(b) **[3]** Dane so tri izjavne formule

$$\forall x \exists y : (P(y,x) \vee Q(x)),$$

$$\forall x \exists y : (P(y,x) \vee R(z)),$$

$$\neg \forall x \exists y : P(y,x) \vee R(z).$$

V spodnji interpretaciji s področjem pogovora D z besedami zapišite pomen vsake od njih!

področje pogovora D :	množica nalog na prvem izpitu iz DS.
$R(x)$:	x je naloga iz poglavja permutacij.
$Q(x)$:	x je najzahtevnejša naloga.
$P(x,y)$:	x je zahtevnejša naloga od naloge y.
z :	naloga 6 na prvem izpitu iz DS.

(c) **[1]** Tisto izjavno formulo iz prejšnje točke, ki ni v preneksni normalni formi, preoblikuj vanjo.

3. **[5 točk] Relacije in preslikave**

Naj bo A množica vseh obveznih predmetov na prvi stopnji Visokošolskega strokovnega študija FRI, B pa množica vseh obveznih predmetov na prvi stopnji Univerzitetnega študija FRI. Velja $A \cap B = \emptyset$. Naj bo R relacija na množici A, definirana s predpisom

xRy natanko tedaj, ko se x in y izvajata v istem letniku študija.

Na isti način definiramo relacijo S na množici B.

(a) **[2]** Navedite definicijo ekvivalenčne relacije. Ali je R ekvivalenčna?

(b) **[1]** Kaj so ekvivalenčni razredi za S?

(c) **[2]** Če A in B vložimo v $A \cup B$, potem R in S postaneta relaciji na $A \cup B$. Določite $R * S$ in R^{-2020} na množici $A \cup B$.

4. **[5 točk] Teorija grafov**

(a) [**1**] Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Napišite zvezo med stopnjami točk in številom povezav, ki jo podaja lema o rokovanju.

(b) [**1**] Kaj pomeni, da je končno zaporedje naravnih števil grafično?

(c) [**1**] Obkrožite črke pred tistimi zaporedji, ki so grafična:

(i) $5, 2, 1, 0$ (ii) $3, 3, 2, 1$ (iii) $3, 3, 3, 3$ (iv) $3, 3, 1, 1.$

(d) [**2**] Naj bo dano neko *padajoče* grafično zaporedje naravnih števil $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, kjer je $k \in \mathbb{N}$, in G eden izmed pripadajočih grafov.

i. [**1**] Kaj mora veljati za števila n_i, da bo G Eulerjev?

ii. [**1**] Največ koliko je kromatično število $\chi(G)$? Odgovor utemeljite.

5. **[5 točk] Razširjen Evklidov algoritem in linearne diofantske enačbe**

(a) [**2**] Z razširjenim Evklidovim algoritmom poiščite največji skupni delitelj števil 65 in 26.

(b) [**1**] Obkrožite črke pred tistimi linearnimi diofantskimi enačbami, ki nimajo nobene celoštevilske rešitve:

(i) $65x+26y = 16$ (ii) $65x+26y = 130$ (iii) $65x+26y = -39;$ (iv) $65x+26y = 27.$.

(c) [**2**] Izberite eno od linearnih diofantskih enačb iz prejšnje točke, ki ima celoštevilske rešitve, in napišite formulo, ki opiše vse njene celoštevilske rešitve.

6. **[5 točk] Permutacije in linearne rekurzivne enačbe**

Naj bosta

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

permutaciji.

(a) **[1]** Določite definicijsko območje in zalogo vrednosti permutacije π?

(b) **[1.5]** Zapišite permutacijo π v obliki produkta disjunktnih ciklov in določite njen red.

(c) **[1.5]** Zapišite permutacijo π v obliki produkta transpozicij in določite njeno parnost.

(d) **[1]** Izračunajte produkt $\pi * \psi$.