· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Drugi rok iz DS - teoretični del, 02.02.2021

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih $[\cdot]$ je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[30 točk]** Dana je izjavna formula

$$(\forall x : \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \exists x : P(x)) \,. \tag{1}$$

(a) Izberite si področje pogovora $\mathcal{D}$ in pomen predikata $P(x)$. Napišite interpretacijo izjavne formule (1) pri tej izbiri $\mathcal{D}$ in $P(x)$.

Pri izbiri $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $P(x)$: 'x je sodo število.' je interpretacija formule (1): Če za vsako naravno število velja, da ni sodo, potem ne obstaja naravno število, ki bi bilo sodo.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk. Če ste izbrali le smiseln $\mathcal{D}$ in $P(x)$, niste pa napisali interpretacije, ste dobili 2 točki.

(b) Izjavno formulo (1) preoblikujte v preneksno normalno obliko.

$$\begin{aligned}
&(\forall x : \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \exists x : P(x)) \\
&\sim (\forall x : \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \exists y : P(y)) \\
&\sim \neg (\forall x : \neg P(x)) \vee (\neg \exists y : P(y)) \\
&\sim (\exists x : P(x)) \vee (\forall y : \neg P(y)) \\
&\sim \exists x : (P(x) \vee \forall y : \neg P(y)) \\
&\sim \exists x \forall y : (P(x) \vee \neg P(y)) \,.
\end{aligned}$$

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk, za vsakega od zgornjih korakov po 2 točki. Koraki so bili lahko narejeni v drugem vrstnem redu.

(c) Ali je izjavna formula (1) splošno veljavna? Če da, to utemeljite, sicer pa poiščite protiprimer.

Formula je splošno veljavna. V interpretaciji s področjem pogovora $\mathcal{D}$ mora obstajati $d \in \mathcal{D}$, tako da za vsak $d' \in \mathcal{D}$ velja $P(d) \vee \neg P(d') \sim 1$. Če obstaja d_0, da velja $P(d_0) \sim 1$, potem je $d = d_0$ dober za vse d'. Če pa tak d_0 ne obstaja, potem za vsak d' velja $\neg P(d') \sim 1$ in za d lahko vzamemo katerikoli element iz $\mathcal{D}$.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk. Vse točke ste dobili tudi, če ste formulo preoblikovali v

$$(\forall x : \neg P(x)) \Rightarrow (\neg \exists x : P(x)) \sim \neg (\forall x : \neg P(x)) \vee (\forall x : \neg P(x)) \,.$$

Prav tako ste dobili vse točke, če ste na kakšen drug smiseln način utemeljili, da imata formuli $(\forall x : \neg P(x))$ in $(\neg \exists x : P(x))$ isto logično vrednost.

---

2. **[40 točk]** Naj bosta $A = \{1, 2, 3, 4\}$ in $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ množici.

(a) Napišite injektivno preslikavo $f : A \to B$.
$f(1) = b_1$, $f(2) = b_2$, $f(3) = b_3$, $f(4) = b_4$.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk.

(b) Koliko preslikav iz množice A v B obstaja?
6^4, saj lahko vsak element iz A preslikamo v kateregakoli izmed 6 elementov množice B.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk.

(c) Koliko injektivnih preslikav iz množice A v B obstaja?
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Element 1 lahko preslikamo v kateregakoli izmed 6 elementov množice B, 2 v kateregakoli izmed petih preostalih, 3 v kateregakoli izmed štirih preostalih in 4 v kateregakoli izmed treh preostalih.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk.

(d) Naj bo $g : A \to B$ preslikava, definirana z $g(1) = g(2) = b_1$, $g(3) = b_2$, $g(4) = b_6$. Poiščite neko preslikavo $h : B \to B$, da velja $g = h \circ f$, kjer je f vaša preslikava iz (2a).
Veljati mora

$$\begin{aligned}
b_1 &= g(1) = (h \circ f)(1) = h(f(1)) = h(b_1),\\
b_1 &= g(2) = (h \circ f)(2) = h(f(2)) = h(b_2),\\
b_2 &= g(3) = (h \circ f)(3) = h(f(3)) = h(b_3),\\
b_6 &= g(4) = (h \circ f)(4) = h(f(4)) = h(b_4).
\end{aligned}$$

Ostala elementa b_5, b_6 pa se lahko slikata kamorkoli v B, npr. $h(b_5) = h(b_6) = b_1$.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk. Če niste napisali predpisa za preostala elementa, ki nista v $\mathcal{Z}_f$ (v zgornji rešitvi sta to b_5 in b_6), ste dobili 8 točk.

---

3. **[30 točk]** V tej nalogi so vsi grafi enostavni, tj. nimajo večkratnih povezav med dvema vozliščema in nimajo zank.

(a) Narišite dva neizomorfna grafa, ki imata stopnje vozlišč $2, 2, 2, 1, 1$.
Prvi graf je pot na pet točkah, drugi pa unija cikla na treh točkah in poti na dveh točkah.

- Za vsakega od dveh neizomorfnih grafov ste dobili po 5 točk.

(b) Naj bo $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_m$, $k_i \in \mathbb{N}$, zaporedje sodih števil, ki je grafično. Ali je vsak graf, ki pripada temu zaporedju, Eulerjev? Če je odgovor da, to utemeljite, sicer pa napišite protiprimer (tj. izberete m in $k_1, \ldots, k_m$ ter narišete pripadajoč graf, ki ni Eulerjev).
Če je graf povezan, potem je odgovor da, saj je graf Eulerjev natanko tedaj, ko so vsa vozlišča sodih stopnj. Če pa graf ni povezan, je odgovor ne.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk. Vse točke ste dobili, če ste bodisi utemeljili, zakaj je odgovor da za povezane grafe, ali pa zakaj je odgovor ne, za nepovezane grafe.

(c) Naj bo $n_1, n_2, \ldots, n_m$, $n_i \in \mathbb{N}$, zaporedje naravnih števil, ki je grafično. Denimo, da je nek graf, ki pripada temu zaporedju, dvodelen. Ali je tudi vsak drug graf, ki pripada temu zaporedju, dvodelen? Če je odgovor da, to utemeljite, sicer pa napišite protiprimer (tj. izberete m in $n_1, \ldots, n_m$ ter narišete dva grafa s temi parametri, pri čemer je en dvodelen, drugi pa ne).
Ne. Za zaporedje $2, 2, 2, 1, 1$ sta grafa iz rešitve točke (3a) protiprimera. Prvi je dvodelen, drugi pa ni.

- Za pravilen odgovor ste dobili 10 točk.