

## Izpit iz Osnov matematične analize

### 13. februar 2018

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

#### 1. [20 točk] Kompleksna števila

- (a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila  $z = x + iy$ ? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.

Število  $z_1 = -2i$  zapišite v polarni obliki, število  $z_2 = 2e^{i\pi}$  pa v kartezični obliki. Obe števili narišite v kompleksni ravnini.

- (b) Naj bosta  $z_1$  in  $z_2$  kompleksni števili iz točke (a). V kompleksni ravnini narišite množico  $A = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_1| \leq |z - z_2|\}$  in pa sliko množice  $A$  s transformacijo  $z \mapsto (1 + i)z$ .

## 2. [20 točk] Zaporedja in vrste

(a) Število  $L$  je limita zaporedja  $(a_n)$ , če \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_.

(b) Katere od naslednjih trditev so pravilne in katere napačne? Če je trditev pravilna, navedite primer, če je napačna pa protiprimer.

- Zaporedje je konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno.
- Zaporedje, ki je konvergentno, je navzgor omejeno.
- Če je zaporedje  $\{a_n\}$  konvergentno in je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , je vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  tudi konvergentna.
- Če je vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergentna, je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- Vrsta  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^{n+1}}{10^n}$  je konvergentna, njena vsota je \_\_\_\_\_ (Če je trditev pravilna, dopolnite!)

## 3. [20 točk] Funkcije

(a) Funkcija  $f(x)$  je v toči  $a$  zvezna, če

(b) Skicirajte graf poljubne funkcije definirane na  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , za katero velja

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \searrow 1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \nearrow -1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \searrow -1} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

(c) Ali je funkcija iz točke (b) zvezna? Zakaj?

4. [20 točk] Odvod

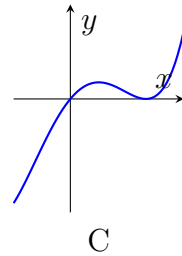
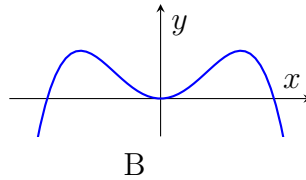
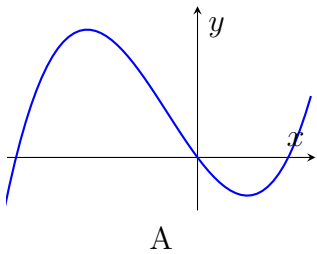
- (a) Zapišite definicijo parcialnega odvoda funkcije  $f(x, y)$  v točki  $(a, b)$  po spremenljivki  $x$ .
- (b) Kako ugotovimo, ali se bo funkcijska vrednost  $f(x, y)$  povečala ali zmanjšala, če se iz točke  $(a, b)$  za malo premaknemo v smeri osi  $x$ ?
- (c) Naj bo  $x(t) = t^2$  in  $y(t) = 3t - 1$ . Zapišite odvod funkcije  $g(t) = f(x(t), y(t))$  (za splošno funkcijo  $f(x, y)$ ).
- (d) Izračunajte parcialni odvod funkcije  $f(x, y) = x^3y - 3xy^2 + y - x$  po spremenljivki  $x$  v točki  $(1, -1)$ . Ali se bo funkcijska vrednost ob majhnem premiku iz te točke v smeri osi  $x$  povečala, zmanjšala ali ostala približno enaka?

5. [20 točk] Integral

(a) Zapišite osnovni izrek integralskega računa.

(b) Če  $f(t)$  predstavlja hitrost avtomobila ob času  $t$ , kaj predstavlja integral  $F(t) = \int_0^t f(u)du$ ?

(c) Za katere od naslednjih treh funkcij je njen nedoločeni integral naraščajoča funkcija na intervalu  $x > 0$ ? Zakaj?



(d) Za funkcijo  $f(x)$  na spodnjem grafu v isti graf skicirajte integral  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

