

Izpit iz Osnov matematične analize

16. februar 2016

- Čas pisanja: **45 minut**. Vsi deli nalog so enakovredni.
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.

(b) Zapišite pravilo za množenje in deljenje kompleksnih števil v polarni obliki.

(c) V kompleksni ravnini skicirajte območje

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \leq 0, |z| \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

in območje \mathcal{E} v katerega se \mathcal{D} preslika s preslikavo $z \mapsto \frac{i}{2} \bar{z}$.

2. [15 točk] Zaporedja in vrste

- (a) V katerem primeru je naraščajoče zaporedje konvergentno?

- (b) Kdaj je vrsta konvergentna?

- (c) Zapišite primer divergentne vrste katere členi konvergirajo proti 0.

3. [15 točk] Funkcije več spremenljivk

- (a) Kaj je nivojska krivulja funkcije $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$?

- (b) Definirajte parcialni odvod funkcije $f = f(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ po spremenljivki x .

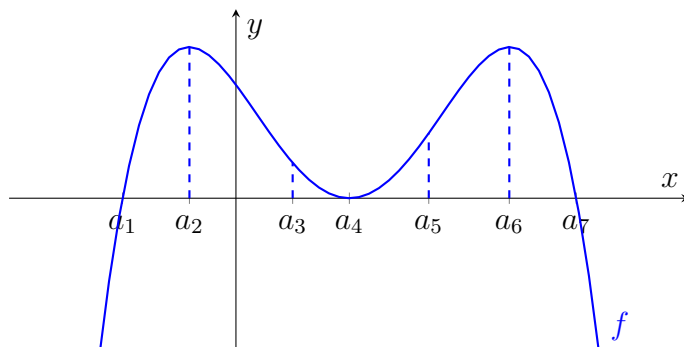
- (c) Denimo, da je $f(1, 2) = 3$, $f_x(1, 2) = 4$ in $f_y(1, 2) = -5$. Določite približek funkcijske vrednosti $f(1.1, 2.2)$.

4. [20 točk] Odvod

- (a) Število a je stacionarna točka funkcije f , če velja _____
Kakšne tipe stacionarnih točk poznamo? _____
_____.

- (b) Skicirajte, kako v okolici stacionarne točke a izgleda graf funkcije f . Pod vsak tip zapišite vrednost $f''(a)$.

- (c) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj ima naslednji graf:

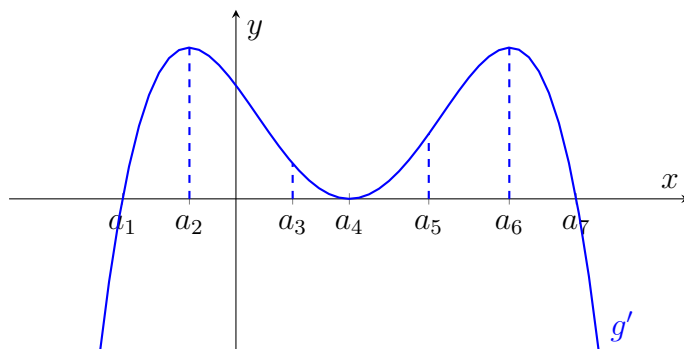


V vsakega od spodnjih štirih kvadratkov napišite, ali so vrednosti na levi od njega pozitivne ($>$), negativne ($<$), enake 0 ($=$) ali da jih iz grafa odvoda ne moremo razbrati (?):

$$\begin{array}{l} f'(a_5) \quad \square \quad 0 \\ f'(a_2) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f''(a_6) \quad \square \quad 0 \\ f''(a_7) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

- (d) *Odvod* funkcije $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj ima naslednji graf:



V vsakega od spodnjih štirih kvadratkov napišite, ali so vrednosti na levi od njega pozitivne ($>$), negativne ($<$), enake 0 ($=$) ali da jih iz grafa odvoda ne moremo razbrati (?):

$$\begin{array}{l} g(a_2) \quad \square \quad 0 \\ g'(a_3) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g''(a_3) \quad \square \quad 0 \\ g''(a_2) \quad \square \quad 0 \end{array}$$

5. [15 točk] **Integral**

(a) Kaj je določeni integral pozitivne funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$?

(b) Natančno zapišite Newton-Leibnizovo formulo.

(c) Skicirajte graf poljubne lihe funkcije $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = 2 \quad \text{in} \quad \int_0^4 f(x)dx = -4.$$

6. [15 točk] **Diferencialne enačbe**

(a) Kaj je diferencialna enačba?

Kaj je red diferencialne enačbe?

(b) Zapišite poljubno nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda.

(c) Opišite, kako bi rešili diferencialno enačbo oblike $y' + f(x)y = g(x)$?