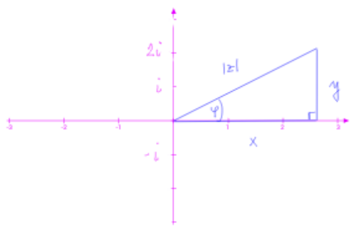
Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

Izpit iz Osnov matematične analize
5. februar 2014

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[20 točk] Kompleksna števila**

   (a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se kartezični koordinati izražata s polarnima.



$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

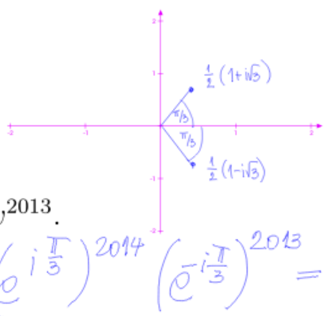
   (b) Zapišite pravilo za množenje kompleksnih števil v polarni obliki.

$z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\psi}$ $\Rightarrow$ $zw = |z|\,|w|\,e^{i(\varphi+\psi)}$

   (c) V kompleksni ravnini narišite števili $z = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ in $w = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ in ju zapišite v polarni obliki.

$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $\qquad \tan\varphi_z = \dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi_z = \frac{\pi}{3}$ $\qquad z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$|w| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ $\qquad \tan\varphi_w = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi_w = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad w = e^{-i\frac{\pi}{3}}$



   (d) Izračunajte $z^{2014}w^{2013}$.

$z^{2014}w^{2013} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2014}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2. **[15 točk] Funkcije več spremenljivk**

Podana je funkcija dveh spremenljivk $f(x,y) = \sqrt{\log(y - x^2)}$.

(a) Določite definicijsko območje funkcije f.

$y - x^2 > 0$

$y > x^2$

$\log(y - x^2) \geq 0$

$y - x^2 \geq 1$

$y \geq x^2 + 1$

$\mathcal{D}_f = \{(x,y);\ y \geq x^2+1\}$

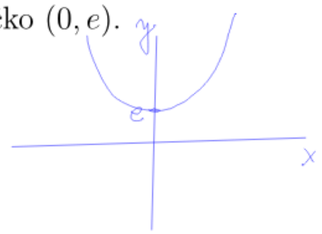
(b) Zapišite in skicirajte nivojsko krivuljo, ki gre skozi točko $(0, e)$.

$f(0,e) = \sqrt{\log(e)} = 1$

$\sqrt{\log(y-x^2)} = 1$

$\log(y-x^2) = 1$

$y - x^2 = e \Rightarrow y = x^2 + e$



(c) V kateri smeri funkcijska vrednost funkcije f najhitreje narašča, če se za malo premaknemo iz točke $(0, e)$?

V smeri gradienta v $(0,e)$.

$f_x = \frac{1}{2\sqrt{\log(y-x^2)}} \cdot \frac{1}{y-x^2} \cdot (-2x)$

$f_y = \frac{1}{2\sqrt{\log(y-x^2)}} \cdot \frac{1}{y-x^2}$

$f_x(0,e) = 0$

$f_y(0,e) = \frac{1}{2e}$

$\Rightarrow$ v smeri $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2e} \end{bmatrix}$, oziroma v smeri $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. **[25 točk] Odvod**

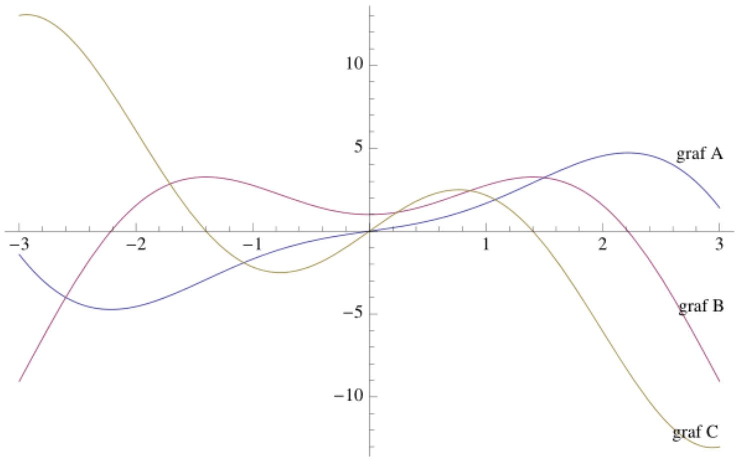
(a) Zapišite definicijo odvoda funkcije f v točki a.

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

(b) Kaj nam odvod f' pove o naraščanju in padanju funkcije f?

Če je v dani točki a vrednost $f'(a) > 0$, potem v a funkcija narašča,
če je v a vrednost $f'(a) < 0$, potem v a funkcija pada.

(c) Na spodnji sliki so narisani grafi funkcij $y = f(x)$, $y = f'(x)$ in $y = f''(x)$. Zapišite, kateri od grafov A, B, C predstavlja katero od funkcij f, f', f'':



Graf funkcije $y = f(x)$ je graf $\underline{\quad A \quad}$.

Graf funkcije $y = f'(x)$ je graf $\underline{\quad B \quad}$.

Graf funkcije $y = f''(x)$ je graf $\underline{\quad C \quad}$.

(d) Izračunajte odvod funkcije $f(x) = e^{\cos(\pi x)}$.

$$f'(x) = e^{\cos(\pi x)}\left(-\sin(\pi x)\right)\cdot \pi$$

(e) Za funkcijo $f(x) = e^{\cos(\pi x)}$ določite intervale naraščanja in padanja na intervalu $[0, 2$[redacted]$]$.

f narašča $\iff f'(x) > 0 \iff -\overset{>0}{\pi}\, \overset{>0}{e^{\cos(\pi x)}} \sin(\pi x) > 0$

$\iff \sin(\pi x) < 0$

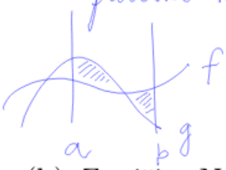
$\iff \pi x \in (\pi, 2\pi) \iff x \in (1, 2)$

f pada $\iff \pi x \in (0, \pi) \iff x \in (0, 1)$

4. **[20 točk] Nedoločeni in določeni integral**

(a) Kaj geometrijsko predstavlja integral $\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$, kjer sta $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji?

ploščino med krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$ na intervalu $[a, b]$, če je $f \geq g$.



$\int_a^b (f - g)\, dx = A_1 - A_2$, kjer je A_1 ploščina območja med f in g, kjer $f \geq g$

A_2 —||— $g \geq f$

na $[a, b]$

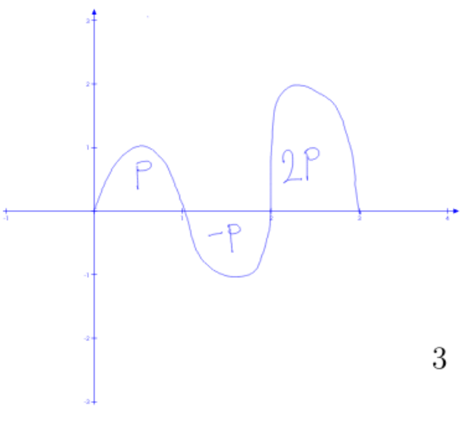
(b) Zapišite Newton-Leibnitzovo formulo za računanje določenega integrala.

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kjer je $F'(x) = f(x)$

(c) Če je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija, potem je $\int\limits_x^{x^3} f'(t)\, dt = \underline{f(x^3) - f(x)}$.

(d) Skicirajte graf kakšne funkcije $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, za katero bo veljalo

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\int_1^2 f(x)\, dx \;\; \text{ter} \;\; \int_0^3 f(x)\, dx = 2\int_0^1 f(x)\, dx.$$



5. **[20 točk] Diferencialne enačbe**

(a) Kaj je diferencialna enačba?

$G(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$, če $x = x(t)$

(ali pa $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, če $y = y(x)$)

(b) Zapišite primer diferencialne enačbe šestega reda.

$y^{(6)} = 0$

(c) Kaj so rešitve diferencialne enačbe $y' = \frac{1}{y}$?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$
$$y\,dy = dx$$
$$\frac{y^2}{2} = x + C$$
$$y^2 = 2x + 2C$$
$$y = \pm\sqrt{2x + 2C}$$

(d) Zapišite tisto rešitev diferencialne enačbe $y' = \frac{1}{y}$, ki ustreza začetnemu pogoju $y(1) = 1$.

$$y^2 = 2x + 2C$$
$$1 = 2 + 2C$$
$$2C = -1$$
$$C = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{2x - 1}$$