Matematika 1

Gabrijel Tomšič   Bojan Orel   Neža Mramor Kosta

21. april 2008

Poglavje 4

Odvod

4.1 Definicija odvoda

Naj bo funkcija f definirana na intervalu (a, b) in x_0 točka s tega intervala. Vzemimo število h, dovolj majheno, da je tudi $x_0 + h \in (a, b)$ in

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

prirastek funkcijske vrednosti. *Diferenčni kvocient* funkcije f v točki x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta y}{h} = \varphi(x_0, h)$$

pove, kako hitro se v povprečju spreminja vrednost funkcije f med točkama $x_0 + h$ in x_0.

Definicija 4.1.1. Funkcija f je v točki x_0 *odvedljiva*, če obstaja limita diferenčnega kvocienta:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ki ji pravimo *odvod* funkcije f v točki x_0.

Odvod $f'(x_0)$ meri hitrost, s katero se vrednost funkcije spreminja v bližini točke x_0.

Primer 4.1.1. Izračunajmo odvode funkcij:

1. Za funkcijo $f(x) = x^2$ je diferenčni kvocient enak

$$\varphi(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h.$$

   Njegova limita obstaja v vsaki točki x in je enaka

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(x,h) = 2x.$$

2. Vzemimo $f(x) = \sin x$. Potem je

$$\begin{aligned}\varphi(x,h) &= \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}\end{aligned}$$

   in

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \varphi(x,h) &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x.\end{aligned}$$

   Izračunajmo posebej limito:

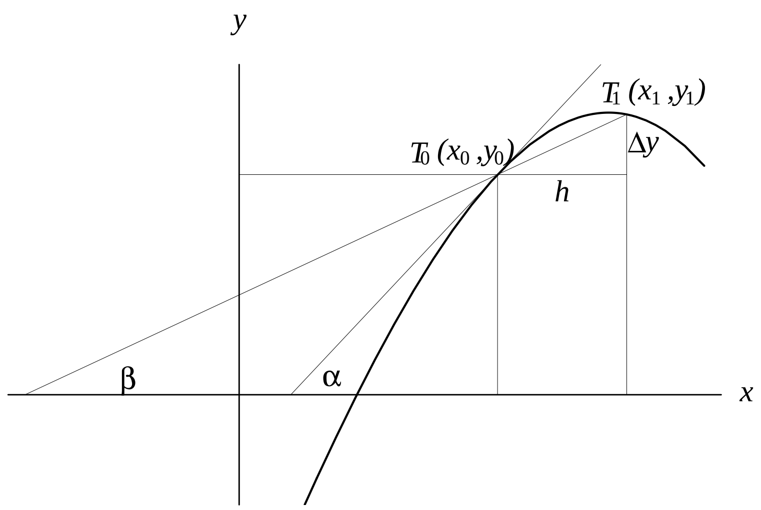
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \\ &= (-1) \cdot \frac{0}{2} = 0,\end{aligned}$$

   torej je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \varphi(x,h) = \sin x \cdot 0 + \cos x = \cos x.$$

■

Diferenčni kvocient je enak tangensu kota, ki ga premica skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ na grafu oklepa s pozitivnim delom osi x, torej smernemu koeficientu te premice. Ko $h \to 0$, ta premica (sekanta grafa) drsi proti tangenti. Funkcija je odvedljiva v točki x_0 natanko takrat, kadar ima njen graf v točki $(x_0, f(x_0))$ tangento, odvod $f'(x_0)$ pa je smerni koeficient te tangente.



Slika 4.1: Odvod funkcije

Lahko se zgodi, da v kakšni točki limita diferenčnega kvocienta sicer ne obstaja, obstaja pa leva limita:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Taka funkcija je v točki x_0 *odvedljiva z leve*, limita je *levi odvod* funkcije v točki x_0. Če obstaja desna limita:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

je f v točki x_0 *odvedljiva z desne*, limita pa je *desni odvod* funkcije v točki x_0.

Funkcija f je v točki x_0 odvedljiva natanko tedaj, kadar levi in desni odvod obstajata in sta enaka.

Primer 4.1.2. Odvedljivost funkcij:

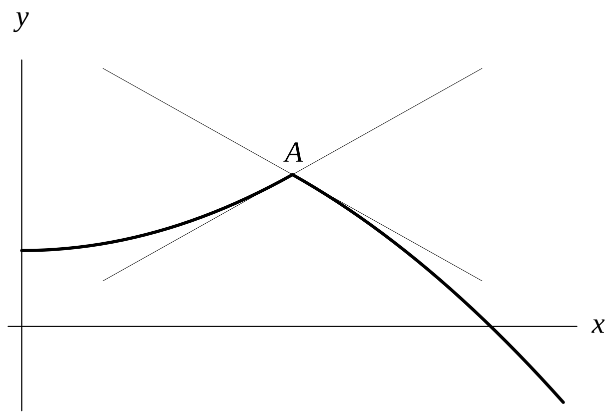
1. Naj bo $f(x) = |x|$. V točki $x_0 = 0$ je levi odvod enak

$$f'(0-0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1,$$

desni odvod pa je

$$f'(0+0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Funkcija v tej točki ni odvedljiva. To se na grafu funkcije pozna tako, da je v točki x_0 graf prelomljen.



Slika 4.2: Zvezna funkcija, ki ni odvedljiva, je pa odvedljiva z desne in z leve

Splošno velja: če je levi odvod v neki točki različen od desnega, graf funkcije v tej točki nima tangente. Če se točki približujemo z leve, drsi sekanta grafa proti premici s smernim koeficientom $f'(x_0 - 0)$ (včasih ji pravimo leva tangenta). Če se približujemo z desne, drse sekanta proti premici s smernim koeficientom $f'(x_0 + 0)$ (proti desni tangenti). V točki $A(x_0, y_0)$ se graf funkcije prelomi.

2. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

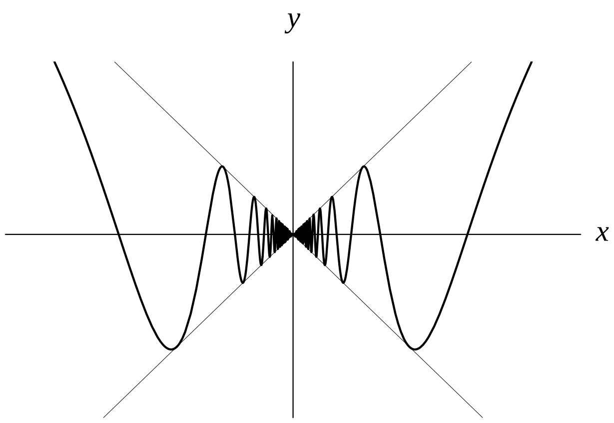
je v točki $x_0 = 0$ zvezna, saj je

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

vendar ni odvedljiva, saj limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin(1/h)}{h} = \lim_{h\to 0} \sin(1/h),$$

ne obstaja. Funkcija ni odvedljiva niti z desne niti z leve. Graf v tej točki nima ne leve ne desne tangente. ■



Slika 4.3: Graf funkcije $f(x) = x \sin 1/x$; f je v točki 0 zvezna, vendar ni odvedljiva niti z leve niti z desne

Kot kažeta funkciji v primeru 4.1.2, obstajajo funkcije, ki so zvezne, pa niso odvedljive. Obratno se ne more zgoditi:

Izrek 4.1.1. *Če je funkcija v neki točki odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.*

Dokaz. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x_0. Ker je

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

je tudi

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + 0 \cdot f'(x_0) = f(x_0)$$

in, zaradi izreka 3.2.3, je funkcija f zvezna v x_0. □

Na podoben način dokažemo, da je funkcija, ki je v neki točki odvedljiva z desne (ali z leve), tudi zvezna z desne (ali z leve).

Definicija 4.1.2. Funkcija f je *odvedljiva na odprtem intervalu* (a, b), če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$. Na *zaprtem intervalu* $[a, b]$ je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a, b)$ in če v levem krajišču a obstaja desni odvod, v desnem krajišču b pa levi odvod.

Iz izreka 4.1.1 sledi, da je funkcija, ki je na nekem intervalu odvedljiva, na tem intervalu tudi zvezna. Njen odvod $f'(x)$ je tudi funkcija, definirana na tem intervalu.

4.2 Pravila za odvajanje

1. Konstantna funkcija $f(x) = C$ je odvedljiva v vsaki točki, njen odvod je:
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

2. Identična funkcija $f(x) = x$ je odvedljiva v vsaki točki, njen odvod je:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1.$$

3. Če sta f in g odvedljivi funkciji, sta odvedljivi tudi vsota $f + g$ in razlika $f - g$ in velja:
$$(f+g)' = f' + g' \quad \text{in} \quad (f-g)' = f' - g'.$$
Dokaz. Naj bo $F = f + g$. Diferenčni kvocient funkcije F v točki x je
$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$
V limiti, ko $h \to 0$, leva stran konvergira proti $F'(x)$, desna pa proti $f'(x) + g'(x)$. Podobno velja za odvod razlike. □

   V posebnem primeru, ko je g konstantna funkcija, od tod sledi:
$$(f + C)' = f'.$$

   Pravila za odvajanje vsote lahko posplošimo na vsoto n funkcij:
$$(f_1 + \cdots + f_n)' = f_1' + \cdots + f_n'.$$

4. Produkt odvedljivih funkcij f in g je odvedljiva funkcija in velja

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Dokaz. Naj bo $F = fg$. Diferenčni kvocient za funkcijo F je

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Ko $h \to 0$, konvergirata ulomka proti $f'(x)$ in $g'(x)$, $g(x+h)$ pa proti $g(x)$. □

Če je ena od funkcij konstanta, iz tega pravila sledi:

$$(Cf)' = Cf'.$$

Tudi pravilo za odvod produkta dveh funkcij lahko posplošimo na produkt več funkcij:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_n + f_1 f_2' \cdots f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_n'$$

Primer 4.2.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $f(x) = x^n = x \cdot x \cdots x$. Potem je

$$f'(x) = 1 \cdot x \cdots x + x \cdot 1 \cdots x + \cdots + x \cdot x \cdots 1 = nx^{n-1}.$$

■

5. Kvocient f/g dveh odvedljivih funkcij f in g je odvedljiva funkcija v vsaki točki, kjer je $g \neq 0$, in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Dokaz. Diferenčni kvocient za funkcijo f/g je

$$\frac{1}{h}\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) =$$

$$\frac{[f(x+h)-f(x)]g(x)-f(x)[g(x+h)-g(x)]}{hg(x)g(x+h)} =$$

$$\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)}.$$

Ko gre $h\to 0$, konvergirata ulomka v števcu proti $f'(x)$ in $g'(x)$, $g(x+h)$ pa proti $g(x)$. □

Primer 4.2.2. Izračunajmo odvode

(1) Odvod potence z negativnim eksponentom:

$$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n},\quad n\in\mathbb{N}:$$

$$f'(x)=\frac{0\cdot x^n-1\cdot nx^{n-1}}{x^{2n}}=-\frac{n}{x^{n+1}}.$$

(2) Odvod racionalne funkcije:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^3-1}:$$

$$f'(x)=\frac{2x(x^3-1)-3x^2(x^2+1)}{(x^3-1)^2}=\frac{-x^4-3x^2-2x}{(x^3-1)^2}.$$

■

6. Če je funkcija $u(x)$ odvedljiva v točki x_0 in funkcija $f(u)$ odvedljiva v točki $u_0=u(x_0)$, je sestavljena funkcija $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ odvedljiva v točki x_0 in je

$$(f(u(x_0)))'=f'(u_0)\cdot u'(x_0). \tag{4.1}$$

Dokaz. Izračunajmo diferenčni kvocient v točki x_0 za funkcijo $F(x)=f(u(x))$:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{f(u(x_0+h))-f(u(x_0))}{h}. \tag{4.2}$$

Naj bo

$$k=u(x_0+h)-u(x_0).$$

Ker je u odvedljiva v točki x_0, je tudi zvezna, in zato je

$$\lim_{h\to 0} k = \lim_{h\to 0}[u(x_0+h) - u(x_0)] = 0.$$

Od tod sledi:

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{f(u_0+k) - f(u_0)}{k} \cdot \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}.$$

V limiti, ko $h \to 0$, gre tudi $k \to 0$ in dobimo enačbo (4.1). □

Primer 4.2.3. Vzemimo, funkcijo $f(x)$, katere odvod poznamo. Izračunajmo odvod funkcije $g(x) = f(x-a)$ (tj. funkcije, ki jo dobimo, če f premaknemo za a vzdolž osi x). V tem primeru je $g(x) = f(u(x))$, kjer je $u(x) = x - a$, in $u'(x) = 1$, torej

$$g'(x) = f'(u(x))u'(x) = f'(u(x)) = f'(x-a).$$

V primeru 4.1.1 smo izračunali, da je $(\sin x)' = \cos x$. Zaradi

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

je

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x. \tag{4.3}$$

■

7. Naj bo f injektivna funkcija, tako da obstaja njena inverzna funkcija f^{-1}. Če je f odvedljiva v točki x in je $f'(x) \neq 0$, je f^{-1} odvedljiva v točki $y = f(x)$ in velja:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}. \tag{4.4}$$

Dokaz. Ker sta si funkciji inverzni, je $F(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. Odvod funkcije $F(x) = x$ je enak 1, iz pravila za posredno odvajanje sledi:

$$1 = F'(x) = (f^{-1})'(y) \cdot f'(x)$$

□

Primer 4.2.4. Potenca x^n, $n \geq 1$ je odvedljiva funkcija, njen odvod je $(x^n)' = nx^{n-1} \neq 0$ za vsak $x \neq 0$, zato je tudi njej inverzna funkcija $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ odvedljiva v vsaki točki $y = x^n \neq 0$ in velja

$$(y^{1/n})' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n(y^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}y^{1/n-1}.$$

Če je p/q poljubno racionalno število, je $x^{p/q} = (x^{1/q})^p$, in po pravilu za posredno odvajanje je

$$(x^{p/q})' = p(x^{1/q})^{p-1} \cdot \frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}. \tag{4.5}$$

Formule, ki smo jih dobili v primerih 4.2.1 in 4.2.2 so samo posebni primeri tega splošnega pravila. ■

4.3 Odvodi elementarnih funkcij

Odvod eksponentne funkcije

$$(a^x)' = a^x \log a \tag{4.6}$$

Dokaz. Ker je

$$\frac{a^{x+h} - a^h}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h},$$

je odvod enak

$$(a^x)' = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}. \tag{4.7}$$

Da bi izračunali zgornjo limito, definirajmo novo spremenljivko s predpisom $t = a^h - 1$. Zanjo velja $t \to 0$ obenem ko $h \to 0$. Ker je $h = \log(1+t)/\log a$, je

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{t \log a}{\log 1 + t} = \frac{\log a}{\log(1+t)^{1/t}},$$

torej je v limiti

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \frac{\log a}{\lim_{t \to 0} \log(1+t)^{1/t}} = \log a$$

(glej primer 3.2.7). Ko to vstavimo v enačbo (4.7), dobimo (4.6). □

Posebno preprosta je enačba (4.6) v primeru, ko je $a = e$, saj je

$$(e^x)' = e^x.$$

Odvod logaritemske funkcije

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a} \tag{4.8}$$

Dokaz. Ker je logaritem $y = \log_a x$ definiran kot inverzna funkcija potence $x = a^y$, je

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \log a} = \frac{1}{x \log a}.$$

□

Poseben primer tega pravila je odvod naravnega logaritma

$$(\log x)' = \frac{1}{x}.$$

Odvod potence

$$(x^r)' = rx^{r-1} \tag{4.9}$$

Dokaz. Odvod potence x^r z racionalnim eksponentom r smo že izračunali v primeru 4.2.4. Veljavnost formule (4.9) za realen eksponent dokažemo tako, da potenco, zaradi $x^r = e^{r \log x}$, odvajamo kot posredno funkcijo:

$$(x^r)' = (e^{r \log x})' = e^{r \log x}(r \log x)' = x^r \frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

□

Odvodi kotnih funkcij

$$(\sin x)' = \cos x \tag{4.10}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{4.11}$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \tag{4.12}$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x) \tag{4.13}$$

Dokaz. Formulo (4.10) smo dokazali že v primeru 4.1.1, formulo (4.11) pa v primeru 4.2.3.

Odvod funkcije $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ dobimo s pravilom za odvajanje kvocienta

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Enako izpeljemo tudi formulo za odvod funkcije $\operatorname{ctg} x = \cos x / \sin x$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

□

Odvodi ciklometričnih funkcij

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.14}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{4.15}$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{4.16}$$

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{4.17}$$

Dokaz. Formulo (4.14) dobimo z uporabo pravila za odvod inverzne funkcije:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Ker je $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ za vse $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, dobimo

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Formulo (4.15) dobimo najenostavneje, če odvajamo identiteto

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

in dobimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (\arccos x)' = 0.$$

Za odvod funkcije arc tg uporabimo pravilo za odvod inverzne funkcije:

$$(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg} y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odvod funkcije arc ctg dobimo podobno. □

Odvodi hiperboličnih funkcij

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \tag{4.18}$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x \tag{4.19}$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \tag{4.20}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x} \tag{4.21}$$

Dokaz. Formule (4.18–4.21) dobimo s pomočjo pravila za odvod posredne funkcije in definicije hiperboličnih funkcij. □

Primer 4.3.1. S pomočjo pravil za odvajanje in tabele 4.1 lahko izračunamo odvod vsake funkcije, ki je sestavljena le iz teh elementarnih funkcij. Naredimo nekaj zgledov:

1. Racionalno funkcijo
$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2}$$
odvajamo kot kvocient
$$f'(x) = \frac{3(x^2-2) - 2x(3x+1)}{(x^2-2)^2} = -\frac{3x^2+2x+6}{(x^2-2)^2}, \quad |x| \neq \sqrt{2}.$$

2. Odvod kvadratnega korena poljubne odvedljive funkcije $y = \sqrt{f(x)}$ dobimo po pravilu za odvajanje posredne funkcije
$$y' = \frac{1}{2}[f(x)]^{-1/2} f'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

funkcija	odvod	opomba
x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \log a$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$	$a > 0, x > 0$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (k + \frac{1}{2})\pi$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arc\,ctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	
$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	
$\operatorname{cth} x$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$x \neq 0$

Tabela 4.1: Odvodi elementarnih funkcij

3. Funkcijo $y = \sin\sqrt{1+x^2}$ odvajamo kot posredno funkcijo

$$y' = \cos\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$\cos\sqrt{1+x^2}\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = \cos\sqrt{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Določimo še vrednost odvoda za $x = 1$:

$$y'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}.$$

4. Tudi funkcijo $y = \log(x + \sqrt{x^2+a})$ odvajamo kot posredno funkcijo. Naj bo $u = x + \sqrt{x^2+a}, y = \log u$, pa dobimo

$$y' = (\log u)'u' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}}{x + \sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

5. Algebraično funkcijo, ki jo določa implicitna relacija

$$4x^2 - 5xy + 2y^2 - 3x + 4y - 6 = 0, \tag{4.22}$$

najenostavneje odvajamo tako, da enačbo (4.22) odvajamo po spremenljivki x in pri tem upoštevamo, da je y odvisen od x:

$$8x - 5y - 5xy' + 4yy' - 3 + 4y' = 0,$$

od koder dobimo odvod

$$y' = \frac{8x - 5y - 3}{5x - 4y - 4}.$$

6. Funkcijo $y = x^x$ najlaže odvajamo tako, da jo najprej logaritmiramo

$$\log y = x \log x,$$

nato pa pri odvajanju upoštevamo na x upoštevamo, da je $\log y$ posredna funkcija spremenljivke x, torej

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1$$

in od tod

$$y' = y(1 + \log x) = x^x(1 + \log x).$$

■

4.4 Diferencial

Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu (a, b), točki x in $x + \Delta x$ na tem intervalu in $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ sprememba vrednosti funkcije f, ko se x spremeni za Δx. Odvod $f'(x)$ lahko zapišemo kot

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Razlika med odvodom in diferenčnim kvocientom

$$\eta = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

gre proti 0, ko $\Delta x \to 0$. Prirastek funkcijske vrednosti

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \eta \Delta x$$

je torej pri majhni spremembi Δx približno enak

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Običajno pišemo $\Delta x = dx$, izrazu

$$dy = f'(x)dx$$

pravimo *diferencial* funkcije $f(x)$.

Odvod se z diferencialom izraža kot

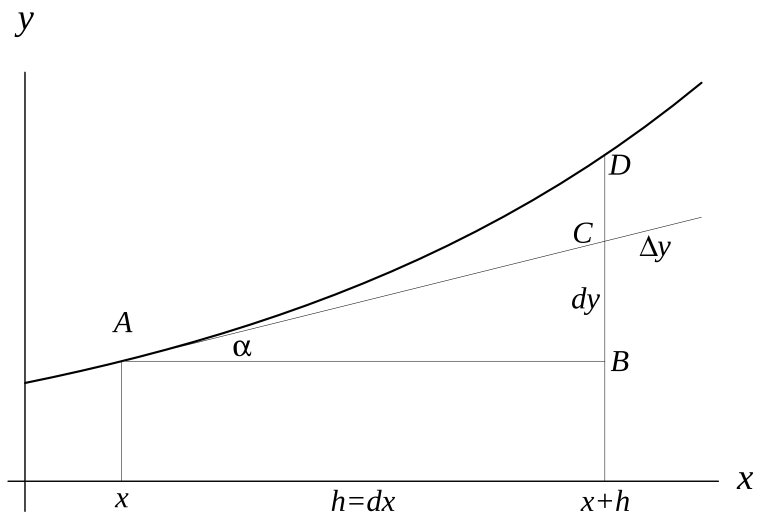
$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}.$$

Ta zapis za odvod ima nekaj prednosti, saj je neposredno razvidno, po kateri spremenljivki odvajamo, pa tudi nekatera pravila za odvajanje se v tej obliki pregledneje zapišejo. Na primer, pravilo za posredno odvajanje zapišemo: če je $y = f(u)$ in $u = u(x)$, je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

pravilo za odvod inverzne funkcije $x = f^{-1}(y)$ pa kot

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$



Slika 4.4: Diferencial funkcije

S slike 4.4 vidimo, da je sprememba neodvisne spremenljivke enaka $AB = h$, prirastek funkcijske vrednosti $BD = \Delta y$ in diferencial enak $BC = y'\,dx = dy$. Diferencial funkcije v določeni točki je enak spremembi ordinate tangente na graf funkcije v točki A pri spremembi abscise za dx. S slike tudi vidimo, da se pri odvedljivi funkciji Δy in dy razlikujeta tem manj, čim bliže ležita točki A in D oz. čim manjša je sprememba dx neodvisne spremenljivke.

Z diferenciali si mnogokrat pomagamo pri računanju približnih vrednosti funkcij, saj velja

$$f(x + dx) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,dx.$$

Primer 4.4.1. Izračunajmo približno vrednost potence $(1.02)^{12}$. Zanima nas vrednost funkcije x^{12} v točki $1.02 = 1 + 0.2$

$$f(1 + 0.2) = f(1) + f'(1) \cdot 0.02 = 1 + 12 \cdot 0.02 = 1.24.$$

Rezultat, ki smo ga dobili, si lahko razlagamo takole: pri povprečni mesečni inflaciji 2% je letna inflacija približno enaka 24%. Vendar je tak približek uporaben samo, če je dx majhen (tj. pri majhni mesečni inflaciji). Večji ko je dx, večjo napako smo pri aproksimaciji naredili, tako da pri velikih vrednostih dx približek s pravo vrednostjo nima več nobene prave zveze (v našem primeru smo že v območju vprašljive vrednosti približka — letna inflacija pri povprečni mesečni inflaciji 2% je enaka 26.8% in napaka 2.6% je lahko v tem primeru že zavajajoča). ■

4.5 Višji odvodi

Če je funkcija f odvedljiva na nekem intervalu, je njen odvod f' nova funkcija, definirana na tem intervalu, ki je lahko odvedljiva. Odvod te funkcije

$$f'' = (f')'$$

imenujemo *drugi odvod* funkcije f. Če je tudi ta odvedljiv, je njegov odvod $f''' = (f'')'$ *tretji odvod* funkcije f. Na splošno pravimo: če je $(n-1)$-vi odvod funkcije f odvedljiva funkcija, je njen odvod

$$(f^{(n-1)})' = f^{(n)}$$

n-ti odvod funkcije f (ali odvod n-tega reda), funkcija f pa je *n-krat odvedljiva.* Za funkcijo, ki ima odvod poljubnega reda, pravimo, da je neskončnokrat odvedljiva.

Primer 4.5.1. Neskončnokrat odvedljive funkcije:

1. Vsak polinom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

je neskončnokrat odvedljiva funkcija na celi množici $\mathbb{R}$, saj je

$$\begin{aligned} f'(x) &= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\ \cdots & \\ f^{(n)} &= n(n-1)\cdots 1 \cdot a_n = n!a_n \\ f^{(m)} &= 0 \text{ za vsak } m > n \end{aligned}$$

2. Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ sta neskončnokrat odvedljivi na celi množici $\mathbb{R}$, njuni odvodi so:

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \ (\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin(x + \pi); \quad (\cos x)'' = -\cos x = \cos(x + \pi)$$

in za vsak $n \in \mathbb{N}$:

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right); \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right). \tag{4.23}$$

Formuli (4.23) brez težav dokažemo z matematično indukcijo. Podrobnosti prepuščamo bralcu. ■

Če je funkcija f dvakrat odvedljiva, je njen *diferencial drugega reda* enak

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)\,dx)'dx = f''(x)\,dx^2,$$

odvod drugega reda se z diferencialom zapiše

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Podobno z diferenciali višjega reda izrazimo višje odvode:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Drugi odvod sestavljene funkcije. Drugi odvod posredne funkcije $y = f(u),\ u = u(x)$ dobimo tako, da prvi odvod, torej funkcijo

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)u'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx},$$

odvajamo in dobimo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(u)(u'(x))^2 + f'(u)u''(x) = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Podobno lahko izračunamo višje odvode posrednih funkcij.

Višji odvodi produkta. Vzemimo n-krat odvedljivi funkciji u in v. Odvodi produkta $y = uv$ so

$$\begin{aligned}
y' &= u'v + uv' \\
y'' &= u''v + 2u'v' + uv'' \\
y''' &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v''' \\
&\dots
\end{aligned}$$

in splošno

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{4.24}$$

Tudi dokaz formule (4.24) z matematično indukcijo prepuščamo bralcu.

Drugi odvod inverzne funkcije. Naj bo f dvakrat odvedljiva injektivna funkcija. Inverzna funkcija f^{-1} je določena z relacijo

$$f(f^{-1}(x)) = x.$$

Če to enačbo enkrat odvajamo in pišemo $f^{-1}(x) = y$, dobimo (tako kot pri izpeljavi formule (4.4) za odvod inverzne funkcije):

$$f'(y) \cdot (f^{-1})'(x) = f'(y) \cdot y' = 1.$$

Če enačbo odvajamo še enkrat in upoštevamo formulo (4.4), dobimo

$$(f''(y) \cdot y') \cdot y' + f'(y)y'' = f''(y) \cdot (y')^2 + f'(y) \cdot y'' = 0,$$

torej je drugi odvod enak

$$(f^{-1})''(x) = y'' = \frac{-f''(y) \cdot (y')^2}{f'(y)} = \frac{-f''(y)}{(f'(y))^3}.$$

4.6 Lastnosti odvedljivih funkcij

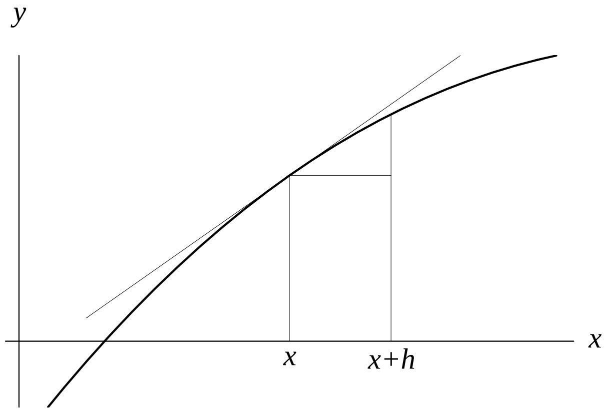
Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$. Če je v neki točki $x \in (a, b)$ odvod $f'(x)$ pozitiven, torej

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

mora biti za dovolj majhen h tudi diferenčni kvocient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0.$$

Razlika funkcijskih vrednosti $f(x+h) - f(x)$ je negativna, če je h negativen, in pozitivna, če je h pozitiven. To pa pomeni, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko x narašča — v točkah levo od točke x (tj. točkah $(x+h)$, kjer



Slika 4.5: Funkcija $f(x)$ ob prehodu skozi točko x narašča.

je h negativen) je manjša kot $f(x)$, v točkah desno od x (tj. točkah $(x+h)$, kjer je h pozitiven) pa je večja kot $f(x)$ (glej sliko 4.5).

Na podoben način se prepričamo, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko, kjer je odvod negativen, pada.

Težje je ugotoviti, kaj se dogaja s funkcijsko vrednostjo ob prehodu skozi točko x_0, kjer je $f'(x_0) = 0$. V takih točkah je tudi diferencial funkcije, ki je ocena za funkcijsko spremembo, enak 0, torej se funkcijska vrednost ob prehodu skozi tako točko spreminja zelo počasi. Točki x_0, v kateri je odvod $f'(x_0) = 0$, pravimo *kritična* ali *stacionarna* točka funkcije f.

4.6.1 Lokalni ekstremi

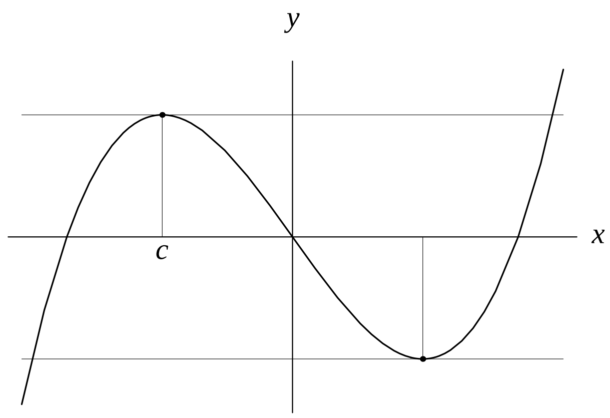
Definicija 4.6.1. Funkcija f ima v točki c *lokalni maksimum*, če obstaja tako število $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Če je $f(x) < f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c *strogi maksimum* funkcije f.

Kadar obstaja število $\delta > 0$, za katerega je $f(x) \geq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, ima funkcija f v točki c *lokalni minimum.* Če je $f(x) > f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c *strogi minimum* funkcije f.

Primer 4.6.1. Funkcija $f(x) = |x|$ ima v točki $x = 0$ strogi lokalni minimum, saj je za vsak $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ in je $f(0) = 0$. ■

Lokalni minimum in lokalni maksimum imenujemo s skupno besedo *lokalni ekstrem*. Pridevnik *lokalni* pomeni, da nas zanima obnašanje funkcije le v bližini določene točke. Funkcija lahko doseže v točki, ki je od točke c, kjer je na primer lokalni maksimum, oddaljena več kot δ vrednost, ki je večja od vrednosti $f(c)$, in ima lahko tudi več lokalnih maksimumov in več lokalnih minimumov.

Izrek 4.6.1. Fermat[1] *Če je funkcija f* odvedljiva*, je točka c, v kateri ima lokalni ekstrem, kritična točka, torej je $f'(c) = 0$.*



Slika 4.6: Odvod funkcije mora biti enak 0 v točkah ekstrema

Dokaz. Recimo, da ima f v točki c lokalni maksimum. Za vse x dovolj blizu c mora biti $f(x) \leq f(c)$, zato je levi odvod v točki c

$$f'(c-0) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0,$$

desni odvod pa

$$f'(c+0) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Ker je funkcija odvedljiva, mora biti levi odvod enak desnemu, kar je mogoče le, če je $f'(c) = 0$.

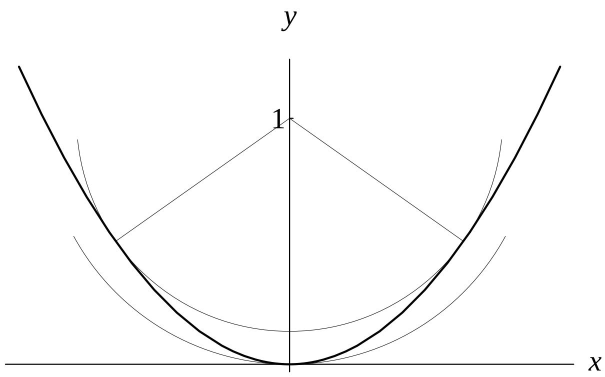
[1]Pierre Fermat (1601–1665), francoski matematik, poznan predvsem po svojih rezultatih v teoriji števil. Od njegovih trditev je verjetno najbolj slaven pred kratkim dokazani *zadnji Fermatov izrek*.

Dokaz za minimum je podoben. □

Pogoj $f'(c) = 0$ iz Fermatovega izreka je *potreben pogoj za obstoj ekstrema*, vendar pa ni zadosten. Na primer, funkcija $f(x) = x^3$ ima v točki 0 odvod enak 0, kljub temu pa v tej točki nima ekstrema, saj je $x^3 < 0$ za $x < 0$ in $x^3 > 0$ za $x > 0$.

Primer 4.6.2. Uporaba lokalnega ekstrema:

1. Poiščimo točko na krivulji $y = x^2$, ki je najmanj oddaljena od točke $(0, 1)$ (slika 4.7).



Slika 4.7: Razdalja med točko na paraboli in točko $(0, 1)$

Razdalja od točke (x, x^2) na krivulji do točke $(0, 1)$ je enaka

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}.$$

Funkcija $d(x)$ je povsod definirana (izraz pod korenom je vedno pozitiven) in odvedljiva, torej ima lokalne ekstreme v kritičnih točkah:

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = 0.$$

Ta enačba ima tri rešitve, zato imamo tri kritične točke:

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Geometrijski razmislek pove, da v eni (ali več) od teh kritičnih točk funkcija res zavzame najmanjšo vrednost. Ker je

$$d(x_1) = 1, \quad d(x_2) = d(x_3) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

sta najmanj oddaljeni od točke $(0,1)$ točki

$$T_1(1/\sqrt{2}, 1/2) \quad \text{in} \quad T_2(-1/\sqrt{2}, 1/2),$$

njuna oddaljenost je $d(x_2) = d(x_3) = \sqrt{3}/2$.

2. Eden od mnogih fizikalnih zakonov, ki jih lahko obravnavamo s pomočjo lokalnega ekstrema kakšne funkcije, je odbojni zakon. Žarek svetlobe z virom v točki A se odbije od ravnega zrcala proti točki B. Pot, ki jo žarek pri tem opiše, je lomljena črta, sestavljena iz dveh daljic: AC in CB, kjer je C točka na zrcalu. Po Fermatovem načelu, znanem iz fizike, svetloba potuje tako, da je potreben čas za prehod iz ene do druge točke najkrajši. Točko C, kjer se svetloba na zrcalu odbije, moramo določiti tako, da bo vsota dolžin $|AC| + |CB|$ najmanjša. Postavimo koordinatni sistem tako, da bo zrcalo na osi x, točka A pa na osi y: $A(0,a)$ (slika 4.8). Če je $B(c,d)$, moramo torej določiti x v $C(x,0)$ tako, da bo imela funkcija

$$d(x) = d_1(x) + d_2(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + d^2}$$

minimalno vrednost. Odvod je

$$d'(x) = \frac{x}{d_1(x)} - \frac{c-x}{d_2(x)}.$$

Kritična točka je tam, kjer je $d'(x) = 0$:

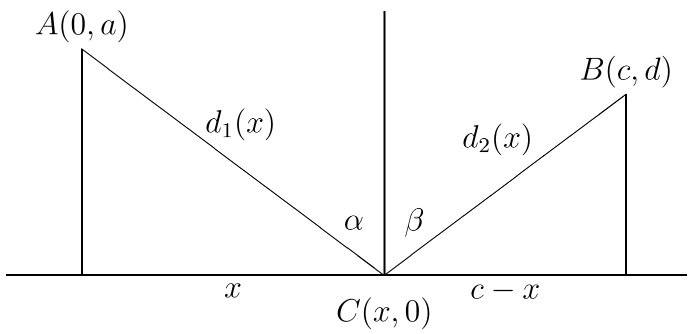
$$\frac{x}{d_1(x)} = \frac{c-x}{d_2(x)}.$$

Na levi strani enačbe je ravno sinus vpadnega kota α, na desni pa sinus odbojnega kota β:

$$\sin\alpha = \sin\beta.$$

Ker sta oba kota ostra, od tod sledi dobro znani odbojni zakon, ki pravi, da je odbojni kot enak vpadnemu. ■

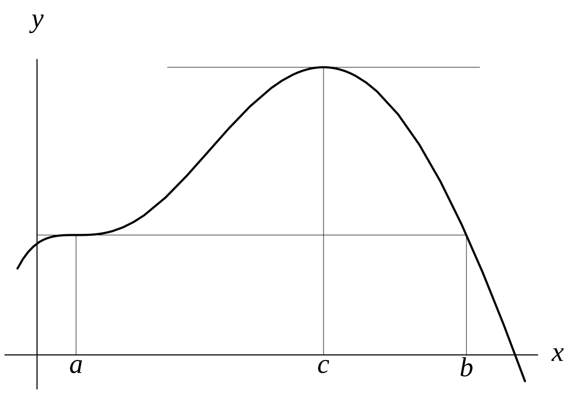
Pozor! Funkcija ima lahko lokalni ekstrem tudi v točki, ki ni kritična točka — namreč takrat, kadar v točki lokalnega ekstrema ni odvedljiva. Tak je ekstrem funkcije $f(x) = |x|$ v primeru 4.6.1.



Slika 4.8: Odboj svetlobe

4.6.2 Odvedljive funkcije na zaprtem intervalu

Izrek 4.6.2. Rolle[2] *Funkcija f, ki je odvedljiva na zaprtem intervalu $[a,b]$ in ima v krajiščih enaki vrednosti $f(a)=f(b)$, ima na intervalu (a,b) vsaj eno kritično točko.*



Slika 4.9: Rollov izrek

Dokaz. Ker je funkcija f odvedljiva na $[a,b]$, je na tem intervalu zvezna. Po izreku 3.2.15 je omejena, po izreku 3.2.16 pa na $[a,b]$ zavzame svojo natančno spodnjo mejo m in svojo natančno zgornjo mejo M. Če je $m=M$,

[2] Michel Rolle (1652–1719), francoski matematik.

je funkcija konstantna in je njen odvod enak 0 na celem intervalu. Če pa je $m < M$, zavzame funkcija f vsaj eno od vrednosti m in M v neki notranji točki $c \in (a, b)$. V točki c je v tem primeru lokalni ekstrem. Ker je f odvedljiva, iz Fermatovega izreka sledi, da je $f'(c) = 0$, torej je c kritična točka. □

Če ima funkcija v obeh krajiščih intervala isto vrednost, je povprečna sprememba funkcijske vrednosti na intervalu enaka 0, Rollov izrek trdi, da je v neki točki na intervalu odvod enak tej povprečni vrednosti spremembe. Naslednji izrek pove, da to pravzaprav velja za vsako odvedljivo funkcijo — vedno obstaja neka točka na intervalu, v kateri je odvod enak povprečni spremembi funkcijske vrednosti.

Izrek 4.6.3. Lagrange[3] *Če je f odvedljiva funkcija na končnem intervalu $[a, b]$, obstaja na tem intervalu vsaj ena točka c, kjer je*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.25}$$

Dokaz. Definirajmo funkcijo g:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funkcija g je odvedljiva povsod na intervalu $[a, b]$, njen odvod je

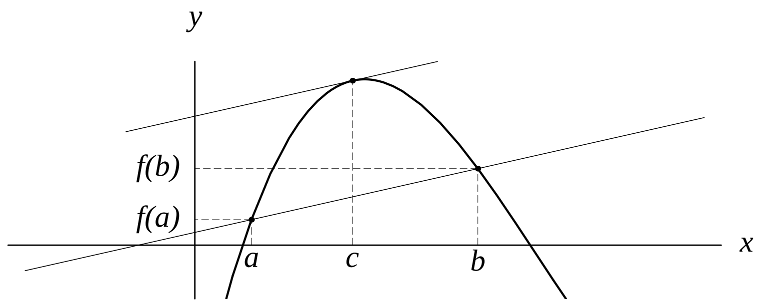
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Poleg tega je $g(a) = g(b) = f(a)$, torej funkcija g zadošča pogojem Rollovega izreka. Na intervalu $[a, b]$ obstaja tako vsaj ena točka c, v kateri je odvod funkcije g enak 0, to pa pomeni, da enačba (4.25) velja. □

Lagrangeov izrek pove, da na gladki krivulji $y = f(x)$ med točkama A in B obstaja vsaj ena točka D, v kateri je tangenta na krivuljo vzporedna sekanti skozi točki A in B (slika 4.10).

Lagrangeov izrek je osrednja lastnost odvedljivih funkcij. Oglejmo si nekaj njegovih ključnih posledic.

[3] Joseph Louis Lagrange (1736–1813), francoski matematik in astronom, začetnik teorije analitičnih funkcij.



Slika 4.10: Lagrangeov izrek

Izrek 4.6.4. *Funkcija f, ki je na intervalu $[a, b]$ odvedljiva in je njen odvod povsod enak* 0*, tj.* $f'(x) = 0$ *za vsak* $x \in (a, b)$*, je konstanta.*

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (a, b]$. Po Lagrangeovem izreku je $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ za nek $c \in (a, x)$. Ker pa je odvod funkcije f povsod enak 0, je tudi $f'(c) = 0$, torej je $f(x) = f(a)$. Funkcija f je konstanta na intervalu $[a, b]$. □

Izrek 4.6.5. *Funkciji f_1 in f_2, ki imata povsod na intervalu $[a, b]$ enaka odvoda, se razlikujeta kvečjemu za konstanto:*

$$f_2(x) = f_1(x) + C.$$

Dokaz. Razlika $F = f_2 - f_1$ ima odvod $F'(x) = f_2'(x) - f_1'(x) = 0$. Po izreku 4.6.4 je $F(x) = f_2(x) - f_1(x) = C$. □

Če sta funkciji f in g odvedljivi na intervalu $[a, b]$, nam Lagrangeov izrek za vsako posebej zagotavlja obstoj točke, v kateri je odvod ravno povprečna sprememba funkcijske vrednosti na intervalu. Obstaja tudi točka, kjer je odvod enak povprečni vrednosti spremembe za obe funkciji hkrati:

Izrek 4.6.6. *[Cauchy] Funkciji f in g naj bosta zvezni na intervalu $[a, b]$, v vsaki notranji točki tega intervala odvedljivi in naj bo $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Potem obstaja število $c \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.26}$$

Dokaz. Funkcija g zadošča pogojem Lagrangeovega izreka, zato je v neki točki $c_1 \in (a,b)$
$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(c_1) \neq 0,$$
torej je $g(b) \neq g(a)$. Sestavimo funkcijo
$$F(x) = f(x) - \lambda g(x)$$
in konstanto λ določimo tako, da bo $F(a) = F(b)$:
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$
Po Rollovem izreku obstaja taka točka $c \in (a,b)$, da je
$$F'(c) = f'(c) - \lambda g'(c) = 0,$$
torej je
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$
■

L'Hôpitalovo pravilo

L'Hôpitalovo pravilo (ki ga je v resnici odkril Johann Bernoulli[4]) je preprosta posledica Cauchyjevega izreka in je zelo uporabno sredstvo za računanje nedoločnih izrazov oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$.

Izrek 4.6.7. l'Hôpital[5] *Naj bosta funkciji f in g definirani in odvedljivi na intervalu (a,b) in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Če v točki $x_0 \in (a,b)$ velja $f(x_0) = g(x_0) = 0$, je*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
pri pogoju, da limita na desni obstaja.

[4]Johann Bernoulli (1667–1748), švicarski matematik, ukvarjal se je z diferencialnimi enačbami in z variacijskim računom

[5]Guillaume François Antoine l'Hôpital (1661–1704), francoski matematik, eden od začetnikov infinitezimalnega računa

Dokaz. Naj bo $x > x_0$. Po Cauchyjevem izreku velja:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

kjer je c med x in x_0. Ko gre $x \to x_0$, gre tudi $c \to x_0$, zato je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

V drugi limiti imamo sicer drugo spremenljivko (c) kot v prvi (x), vendar na vrednost limite to ne vpliva, saj vrednost limite ni odvisna od simbola, ki ga uporabimo za oznako spremenljivke (taki spremenljivki pravimo tudi gluha (vezana) spremenljivka). ∎

L'Hôpitalovo pravilo ima več variacij. Seveda velja v isti obliki, kot je zapisano za limito, tudi za levo in za desno limito. Napišimo kar brez dokaza še dve verziji:

Izrek 4.6.8. *Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na intervalu (a, b), razen v točki $x_0 \in (a, b)$ in $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b). Če je*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad \textit{in} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty,$$

je

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pri pogoju, da druga limita obstaja.

Izrek 4.6.9. *Če sta f in g odvedljivi na nekem intervalu (a, ∞), razen v točki $x_0 \in (a, b)$, če je $g'(x) \neq 0$ na tem intervalu in če je*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

ali

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \textit{in} \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty,$$

potem je

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pri pogoju, da druga limita obstaja.

Primer 4.6.3. Izračunajmo limiti:

1.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x) = \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-1/x}-1}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(1-1/x)^{-1/2}/2x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{2\sqrt{1-1/x}} = -\frac{1}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}\\ = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} &= \lim_{x\to x_0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.\end{aligned}$$

■

4.6.3 Monotonost in zadostni pogoji za ekstrem

V razdelku 3.1 smo že definirali monotonost (naraščanje in padanje) funkcij. Za odvedljive funkcije je ugotovaljanje naraščanja ali padanja preprosto, saj velja:

Izrek 4.6.10. *Odvedljiva funkcija je na intervalu $[a,b]$ naraščajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, in padajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a,b)$.*

Dokaz. Naj bo $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$ in vzemimo poljubni točki $x_1, x_2 \in (a,b)$, kjer je $x_1 < x_2$. Iz Lagrangeovega izreka sledi, da v neki točki $x \in (x_1, x_2)$ velja:

$$f'(x) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Ker je $f'(x) \geq 0$, je $f(y) \leq f(z)$, kar pomeni, da je funkcija naraščajoča. Če je $f'(x) \leq 0$ na intervalu (a,b), na podoben način dokažemo, da je funkcija padajoča.

Po drugi strani, naj bo funkcija f naraščajoča na intervalu $[a, b]$ in $x \in (a, b)$ poljubna točka. Potem je za vsak $h > 0$, za katerega je $x + h < b$,

$$f(x+h) - f(x) > 0$$

in za vsak $h < 0$, za katerega je $x + h > a$, tudi

$$f(x+h) - f(x) < 0.$$

Diferenčni kvocient je v vsakem primeru kvocient dveh enako predznačenih količin, zato je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0,$$

torej mora biti

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Podobno dokažemo, da je odvod padajoče funkcije vedno manjši ali enak 0.

$\square$

Primer 4.6.4. Ugotavljanje monotonosti funkcij s pomočjo odvoda:

1. Določimo intervale, na katerih funkcijska vrednost narašča ali pada, za funkcijo $f(x) = x^2 + 2/x$. Odvajamo:

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}.$$

   Odvod je negativen za vsak $x < 1$, $x \neq 0$ in pozitiven za vsak $x > 1$, točka $x = 1$ je kritična točka. Interval naraščanja je $[1, \infty)$, intervala padanja pa sta $(-\infty, 0)$ in $(0, 1]$.

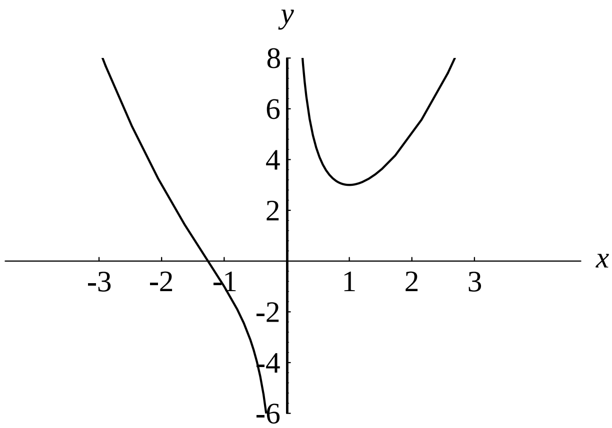
2. Pokažimo, da je funkcija

$$f(x) = (1 + x)^{1/n} - x^{1/n},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$$

   monotono padajoča na celem intervalu $[0, \infty)$.

   Odvod je

$$f'(x) = \frac{1}{n} \left((1 + x)^{(1-n)/n} - x^{(1-n)/n} \right).$$



Slika 4.11: Graf funkcije $x^2 + 2/x$

Ker je $x < 1 + x$ in eksponent $(1 - n)/n$ negativen, je

$$x^{(1-n)/n} > (1 + x)^{(1-n)/n},$$

torej je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in [0, \infty)$.

Od tod lahko izpeljemo zanimivi dejstvi. Najprej, $f(x) < f(0)$ za vsak $x \in [0, \infty)$, torej za vsako pozitivno število in za vsak $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ velja

$$(1 + x)^{1/n} - x^{1/n} > 1.$$

Poleg tega vemo, da je funkcija $f(x)$ injektivna (saj je vsaka strogo monotona funkcija injektivna), torej je obrnljiva na intervalu $[0, \infty)$, zato ima enačba

$$f(x) = (1 + x)^{1/n} - x^{1/n} = y$$

natanko eno rešitev za vsak y iz zaloge vrednosti $Z_f = (0, 1]$. ∎

Iz izreka 4.6.10 sledi preprosta metoda, s katero ugotavljamo, ali funkcija f v kritični točki c zavzame lokalni ekstrem. Če leži točka c na intervalu (a, b), kjer je $f'(x) > 0$, očitno v njej ne more biti lokalnega ekstrema, ker po izreku 4.6.10 funkcija na tem intervalu narašča. Podobno velja, če je $f'(x) < 0$ na nekem intervalu (a, b) okrog točke c. Tako:

Izrek 4.6.11. Prvi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Funkcija $f(x)$ zavzame v kritični točki c lokalni ekstrem natanko takrat, kadar odvod ob prehodu skozi točko c spremeni znak. Če je $f'(x) < 0$ za $x < c$ in*

$f'(x) > 0$ za $x > c$, je v točki c lokalni minimum, v obratnem primeru pa je v točki c lokalni maksimum.

Primer 4.6.5. Funkcija

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

ima odvod

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

kritični točki sta $x_{1,2} = \pm 1$. Odvod $f'(x)$ je:

negativen za $x < -1$,
pozitiven za $-1 < x < 1$,
negativen za $x > 1$,

zato je v točki $x = -1$ minimum, v točki $x = 1$ pa maksimum. ∎

Če je funkcija f v kritični točki c dvakrat odvedljiva, si lahko pomagamo tudi z drugim odvodom: če je $f''(c) > 0$, prvi odvod $f'(x)$ ob prehodu skozi točko c narašča; ker je $f'(c) = 0$, mora biti $f'(x)$ negativen za $x < c$ in pozitiven za $x > c$. Odtod sledi, da je v točki c lokalni minimum. Podobno se prepričamo, da je v točki c lokalni maksimum, če je $f''(c) < 0$. Velja torej:

Izrek 4.6.12. Drugi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Če je funkcija f v kritični točki c dvakrat odvedljiva in je $f''(c) > 0$, zavzame f v c lokalni minimum, če je $f''(c) < 0$, pa lokalni maksimum.*

Primer 4.6.6. Funkcija

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

z odvodom

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0,$$

ima kritični točki $x_1 = 1$ in $x_2 = 3$. Drugi odvod

$$f''(x) = 6x - 12$$

je v točki x_1 negativen, tu je lokalni maksimum, v točki x_2 pa pozitiven, tu je lokalni minimum. ∎

4.7 Taylorjeva formula

Funkcija f, ki je odvedljiva v neki točki a, ima v tej točki diferencial $df = f'(a)dx$. Če je x dovolj blizu a, je vrednost

$$f(a) + df = f(a) + f'(a)(x-a)$$

dober približek za funkcijsko vrednost $f(x)$. Funkcijsko vrednost lahko zapiš-mo kot vsoto

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1,$$

kjer gre napaka R_1 proti 0, ko $x \to a$, prva dva člena pa predstavljata vrednost linearne funkcije $f(a) + f'(a)(x-a)$ pri x.

Taylorjeva formula omogoča, da za funkcije, ki so odvedljive več kot enkrat, približek iz diferenciala izboljšamo tako, da funkcijsko vrednost $f(x)$ aproksimiramo z vrednostjo *Taylorjevega polinoma.* Poleg tega omogoča, da ocenimo napako R, ki jo pri tem naredimo.

Izrek 4.7.1. Taylorjeva formula[6] *Funkcija f naj bo $(n+1)$-krat odvedljiva na intervalu (b,c) in naj bo $a \in (b,c)$. Potem za vsak $x \in (b,c)$ velja*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n.$$

Napaka R_n je enaka

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ neka točka med a in x.

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in (b,c)$. Za vsak y med a in x naj bo

$$F(y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) - \cdots - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Dokazati moramo, da je

$$F(a) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1},$$

kjer je ξ točka med a in x.

[6]Brook Taylor (1685–1731), angleški matematik.

Če funkcijo $F(y)$ odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} F'(y) &= -f'(y) + (f'(y) - f''(y))(x-y) + \cdots - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\,(x-y)^n. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Po drugi strani ima funkcija

$$G(y) = F(y) - \frac{(x-y)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}}F(a)$$

v točkah a in x vrednost 0: $G(a) = G(x) = 0$, in po Rollovem izreku je v neki točki med a in x

$$G'(\xi) = F'(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-a)^{n+1}}F(a) = 0,$$

zato je

$$F(a) = -F'(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}.$$

Če v tej enačbi upoštevamo (4.27), dobimo

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

in izrek je dokazan. □

Polinom

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo *Taylorjev polinom* funkcije f stopnje n okrog točke a. Napake R_n seveda ne moremo natančno izračunati, ker ne poznamo točke ξ — vemo samo, da je to neka točka med a in x. Pogosto pa poznamo kakšno oceno za $(n+1)$-vi odvod funkcije na intervalu (b, c):

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \text{ za vsak } x \in (b, c),$$

ki da oceno za napako

$$|R_n| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}.$$

Primer 4.7.1. Polinom $f(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}$, je $(n + 1)$-krat odvedljiv na celi $\mathbb{R}$, njegov k-ti odvod, $k \leq n$, je enak

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}.$$

Koeficienti Taylorjevega polinoma stopnje n so

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}, \; k \leq n.$$

Ker je $f^{(n+1)}(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je napaka $R_n = 0$. Taylorjeva formula v tem primeru ni nič drugega kot binomski izrek:

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

■

Če je funkcija f ∞-krat odvedljiva na intervalu (b, c), lahko desno stran Taylorjeve formule zapišemo v obliki vrste

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

ki ji pravimo *Taylorjeva vrsta* funkcije f okrog točke a. Delne vsote te vrste so ravno Taylorjevi polinomi. Če za nek $x \in (b, c)$ velja

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

konvergira Taylorjeva vrsta proti vrednosti $f(x)$, zato lahko zapišemo

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Primer 4.7.2. Taylorjeve vrste elementarnih funkcij:

1. Naj bo $f(x) = (1+x)^m$, kjer je eksponent m neko racionalno število. Če je $m < 0$, funkcija f pri $x = -1$ ni definirana, na intervalu $(-1, 1)$ pa je

definirana za vsak m in je ∞-krat odvedljiva, torej jo lahko razvijemo po Taylorjevi formuli okrog točke 0. Ostanek

$$R_n = \binom{m}{n+1}(1+\xi)^{m-n+1}x^{n+1}$$

gre z naraščajočim n proti 0 za vsak $x \in (-1,1)$, saj gre

$$|(1+\xi)^{m-n+1}x^{n+1}| = |1+\xi|^{m+2}\left|\frac{x}{1+\xi}\right|^{n+1}$$

z naraščajočim n proti 0, ker je

$$\left|\frac{x}{1+\xi}\right| < 1.$$

Za vsak $|x| < 1$ tako velja:

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k. \tag{4.28}$$

Vrsti (4.28) pravimo *binomska vrsta.* Če je eksponent $m \in \mathbb{N}$, je binomska vrsta končna, saj je

$$\binom{m}{k} = 0, \quad \text{za} \quad k > m$$

in binomska vrsta se reducira na končno vsoto iz primera (4.7.1).

Poglejmo še posebej primer $m = -1$. V tem primeru je

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-k)}{k!} = (-1)^k,$$

torej za $|x| < 1$,

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k,$$

kar je dobro znana formula za vsoto geometrijske vrste s kvocientom $q = -x$.

2. Eksponentna funkcija je ∞-krat odvedljiva na celi množici $\mathbb{R}$, vsi njeni odvodi so enaki funkciji:

$$(e^x)^{(n)} = e^x \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N},$$

Taylorjeva formula za razvoj okrog točke 0 je:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^0}{k!} x^k + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n.$$

Pokažimo, da gre pri vsakem $x \in \mathbb{R}$ ostanek $R_n \to 0$, ko gre $n \to \infty$. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{R}$ in ocenimo ostanek:

$$|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^n \right| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^n,$$

torej je za vsak n

$$0 \leq |R_n| \leq a_n = \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^n.$$

Za zaporedje a_n velja rekurzivna formula

$$a_{n+1} = a_n \frac{|x|}{n+2}.$$

Od tod sledi, da je za $n \geq \lfloor |x| \rfloor$ to padajoče zaporedje pozitivnih števil, torej konvergentno, z limito, ki je rešitev enačbe

$$a = a \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0, \quad \text{torej} \quad a = 0.$$

Od tod pa sledi, da je tudi $\lim_{n \to \infty} |R_n| = 0$.

Za vsak $x \in \mathbb{R}$ torej velja:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

3. Funkcija $\log x$ je ∞-krat odvedljiva, njeni odvodi so

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \ldots \quad f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}.$$

Tako je Taylorjeva formula okrog točke 1 za funkcijo log enaka

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} x^k + R_n \tag{4.29}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n \tag{4.30}$$

Ostanek R_n konvergira proti 0 za vsak $|x| < 1$ (dokaz za to najdemo na primer v [?]).

4. Zapišimo Taylorjevo formulo za funkcijo $f(x) = \sin x$ okrog točke $a = 0$. Odvodi so

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \left\{ \begin{array}{cl} 0; & n = 2k \\ (-1)^k; & n = 2k-1 \end{array} \right. ,$$

torej je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + R_n.$$

Ostanek vrste lahko ocenimo:

$$|R_n| = \left| \frac{\sin(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2})}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \le \frac{1}{(n+1)!} |x^{n+1}|,$$

to pa pri vsakem $x \in \mathbb{R}$ konvergira proti 0, ko gre $n \to \infty$. Zato je

$$\sin x = \sum_{k=1} \infty \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Na podoben način pridemo do Taylorjeve vrste za $\cos x$:

$$\cos x = \sum_{k=0} \infty \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

■

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta sta zelo uporabno orodje za raziskovanje funkcije v bližini točke, okrog katere razvijamo. Oglejmo si njeno uporabnost pri računanju limit in pri iskanju ekstremov funkcij.

Nedoločeni izrazi Pogosto lahko nedoločene izraze oblike

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

kjer je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

hitreje in uspešneje kot z l'Hôpitalovim pravilom izračunamo tako, da zapišemo nekaj členov v razvoju funkcij f in g v Taylorjevo vrsto okrog točke a.

Primer 4.7.3. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{2x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x/2+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}x^2+\cdots)-1-x/2}{2x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-1/8+\cdots)}{2x^2}=-\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

■

Že v izreku 4.6.12 smo ugotovili, da je v kritični točki c, kjer je funkcija f dvakrat odvedljiva, obstoj ekstrema zagotovljen, kadar je $f''(c)\neq 0$. Kadar je $f''(c)=0$, o obstoju ekstrema ne moremo sklepati. S pomočjo Taylorjeve formule lahko dokažemo:

Izrek 4.7.2. Tretji zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. *Funkcija f, ki je $(n+1)$-krat odvedljiva, ima v kritični točki c lokalni ekstrem, če je*

$$f'(c)=f''(c)=\ldots=f^{(n-1)}(c)=0 \quad \textit{in} \quad f^{(n)}(c)\neq 0,$$

kjer je n sodo število, in sicer lokalni maksimum, če je $f^{(n)}(c)<0$ in lokalni minimum, če je $f^{(n)}(c)>0$. Če je n liho število, ekstrema v točki c ni.

Dokaz. Zaradi Taylorjeve formule je

$$\begin{aligned}
f(c+h)&=f(c)+f'(c)h+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\\
&=f(c)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n,
\end{aligned}$$

kjer je ξ točka med c in $c+h$. Recimo, da je $n=2k$ sodo število in $f^{(n)}(c)>0$. Za dovolj majhen h je točka ξ dovolj blizu točke c in tudi $f^{(n)}(\xi)>0$, obenem pa je $h^n=(h^2)^k\geq 0$ za vsak h in zato velja

$$f(c+h)-f(c)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n\geq 0$$

za vsak h. V točki c je torej lokalni minimum. Podobno dokažemo, da je v točki c lokalni maksimum, če je $n=2k$ in $f^{(n)}(c)<0$.

Kadar pa je n liho število, je predznak potence h^n odvisen od predznaka h, zato je tudi predznak razlike $f(c+h) - f(c)$ odvisen od predznaka h. To že pomeni, da v točki c ni ekstrema. $\square$

Primer 4.7.4. Funkcija $f(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x$ ima odvod

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

enak 0 pri $x = 0$, torej je $x = 0$ kritična točka. Izračunajmo odvode višjega reda:

$$\begin{array}{rlrl} f''(x) = & -4x(1+x^2)^{-2}, & f''(0) & = 0, \\ f'''(x) = & -4(1+x^2)^{-2} + 16x(1+x^2)^{-3}, & f'''(0) & = -4 \neq 0. \end{array}$$

Funkcija f v točki $x = 0$ nima ekstrema. ■

4.8 Konveksnost, konkavnost in prevoji

Definicija 4.8.1. Funkcija f, definirana na intervalu $[a, b]$, je na tem intervalu *konveksna*, če je za vsak $0 < \alpha < 1$ in za vsak par točk $x, y \in [a, b]$,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Povejmo drugače: za poljubni točki $x, y \in [a, b]$ je daljica, ki povezuje točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$, povsod nad grafom funkcije f.

Če je

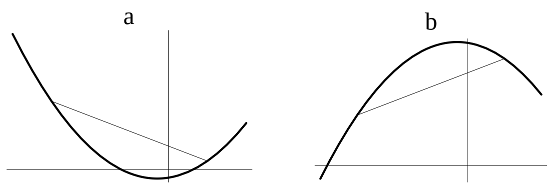
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y),$$

(če daljica, ki povezuje točki $(x, f(x))$ in $(y, f(y))$, leži povsod pod grafom funkcije), je funkcija *konkavna.*

Primer 4.8.1. Funkcija $f(x) = |x|$ je konveksna na celem definicijskem območju $\mathbb{R}$, kajti zaradi trikotniške neenakosti je

$$|\alpha x + (1-\alpha)x| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|x|.$$

■



Slika 4.12: Konveksna (a) in konkavna (b) funkcija

Iz grafa zlahka razberemo, če je funkcija konveksna ali konkavna: vsaka daljica, ki povezuje dve točki na grafu konveksne funkcije, je nad tistim delom grafa, ki leži med obema točkama. Pri konkavni funkciji je daljica, ki povezuje dve točki na grafu vedno pod grafom.

Če je funkcija f vsaj enkrat odvedljiva, je konveksna tam, kjer njen prvi odvod narašča, konkavna pa tam, kjer njen prvi odvod pada. Od tod sledi, da za dvakrat odvedljive funkcije velja:

Izrek 4.8.1. *Dvakrat odvedljiva funkcija je na intervalu I konveksna, če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in I$, in konkavna, če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in I$.*

Funkcija se lahko spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno le v točkah, kjer je $f''(x) = 0$, to je v kritičnih točkah funkcije $f'(x)$. Funkcija f se v točki c spremeni iz konveksne v konkavno natanko takrat, kadar ima prvi odvod $f'(x)$ v tej točki lokalni maksimum. Iz konkavne v konveksno se spremeni, če ima prvi odvod $f'(x)$ v točki c lokalni minimum.

Točko, v katerih se funkcija spremeni iz konveksne v konkavno ali obratno, imenujemo *prevoj* ali *prevojna točka* funkcije f. Če je funkcija f dvakrat odvedljiva in c njen prevoj, je $f''(c) = 0$ in se predznak drugega odvoda $f''(x)$ ob prehodu skozi točko c spremeni. Povejmo še, kako prevojno točko prepoznamo na grafu: če je c prevoj funkcije f, potem graf funkcije v točki c seka tangento na graf v tej točki.

Odvodi (prvega in višjih redov) so lahko v veliko pomoč pri risanju grafov.

Primer 4.8.2. Pokažimo na primerih, kako si lahko pri risanju grafov funkcij pomagamo z odvodi:

1. Narišimo graf funkcije
$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

   Funkcija je definirana in zvezna na celi množici $\mathbb{R}$. Poleg tega je liha, tako da je graf simetričen glede na točko $(0,0)$. Ker je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

ima graf vodoravno asimptoto — premico $y = 0$.

Iz odvoda

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

dobimo, da sta kritični točki $x = \pm 1$. Če je $x < -1$, je $f'(x) < 0$, funkcija na tem intervalu pada. Za $-1 < x < 1$ je $f'(x) > 0$, funkcija narašča, za $x > 1$ je $f'(x) < 0$, funkcija spet pada. V točki $x = -1$ je zato lokalni minimum $f(-1) = -1/2$, v točki $x = 1$ pa lokalni maksimum $f(1) = 1/2$.

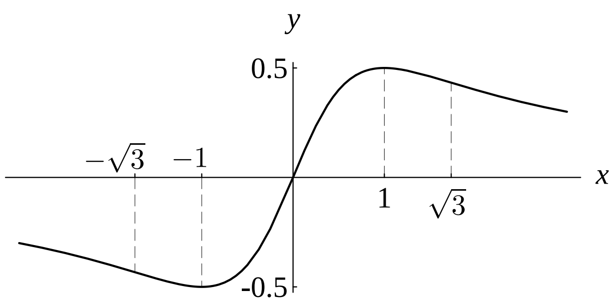
Poiščimo še prevojne točke:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0,$$

rešitve so $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, $x_3 = 0$. Zato:

za	$x < -\sqrt{3}$	je	$f''(x) > 0$,	funkcija je konkavna,
za	$-\sqrt{3} < x < 0$	je	$f''(x) < 0$,	funkcija je konveksna,
za	$0 < x < \sqrt{3}$	je	$f''(x) > 0$,	funkcija je konkavna,
za	$x > \sqrt{3}$	je	$f''(x) < 0$,	funkcija je konveksna.

Točke $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, y_{1,2} = \pm\sqrt{3}/4$ in $x_3 = 0, y_3 = 0$ so vse prevoji (slika 4.13).



Slika 4.13: Graf funkcije $f(x) = x/(1+x^2)$

2. Narišimo graf $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$, kjer je $a > 0$.

Funkcija je povsod definirana in zvezna. Izračunajmo odvod:

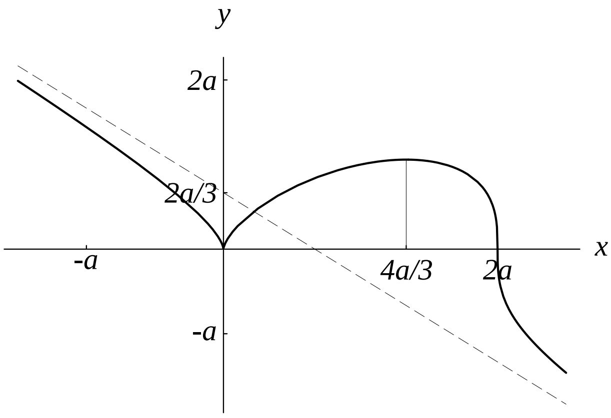
$$f'(x) = \frac{4ax - 3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2}} = \frac{4a - 3x}{3\sqrt[3]{x(2a - x)^2}}.$$

Odvod obstaja povsod, razen v točkah $x_1 = 0$ in $x_1 = 2a$, edina kritična točka je $x_3 = 4a/3$. Pri $x_1 = 0$ in $x_2 = 2a$ je

$$\lim_{x \to x_{1,2}} f'(x) = \pm\infty,$$

tangenta je v teh dveh točkah navpična. Funkcija je

padajoča za	$x < 0$,	ker je	$f'(x) < 0$,
naraščajoča za	$0 < x < 4a/3$,	ker je	$f'(x) > 0$,
padajoča za	$4a/3 < x < 2a$,	ker je	$f'(x) < 0$,
padajoča za	$x > 2a$,	ker je	$f'(x) < 0$.



Slika 4.14: Graf funkcije $y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$.

Vidimo: v točki $x = 0$ je lokalni minimum $f(x) = 0$ (vendar funkcija tu ni odvedljiva — tangenta je v tej točki navpična). V točki $x = 4a/3$ je lokalni maksimum $f(x) = (2/3)a\sqrt[3]{4}$.

Poleg tega je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = -1,$$

to pove, da se graf funkcije f z naraščajočim x približuje premici s smernim koeficientom $k = -1$. Graf ima *poševno asimptoto* oblike

$y = -x + n$. Koeficient n v enačbi asimptote dobimo kot

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2 - x^3)^2 - x(2ax^2 - x^3) + x^2}} = \frac{2a}{3}.$$

Enačba poševne asimptote je $y = -x + 2a/3$.

Izračunajmo še drugi odvod:

$$f''(x) = \frac{8a^2}{9\sqrt[3]{x^4(2a - x)^5}}.$$

Drugi odvod nima ničel in ne obstaja v točkah $x = 0$ in $x = 2a$, kjer f ni odvedljiva. Na intervalih $x < 0$ in $0 < x < 2a$ je negativen, tu je graf konveksen, na intervalu $x > 2a$ je $f''(x) > 0$ in graf je tu konkaven.

3. Oglejmo si še en primer uporabe odvoda. Dane so tri točke v ravnini A, B in C. Iščemo točko X, za katero velja, da je vsota njenih oddaljenosti od točk A, B in C, torej vsota

$$d(X, A) + d(X, B) + d(X, C),$$

čim manjša. Problem malo poenostavimo s predpostavko, da sta točki A in B enako oddaljeni od točke C. Koordinatni sistem v ravnini lahko potem postavimo tako, da je C v izhodišču, A in B pa imata koordinate (a, b) in $(a, -b)$.

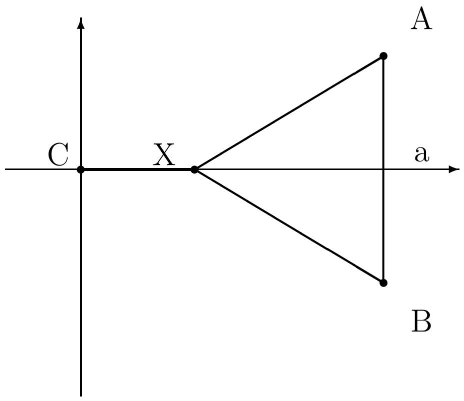
Iz geometrijske slike je razvidno, da točka X leži nekje na intervalu $[0, a]$ na osi x. Vsota razdalj točke X od točk A, B in C je enaka

$$f(x) = x + 2\sqrt{b^2 + (a - x)^2}. \tag{4.31}$$

Poiskati moramo minimum zvezne funkcije (4.31) na intervalu $[0, a]$.

Zvezna in odvedljiva funkcija na zaprtem intervalu zavzame svoje ekstreme v kritičnih točkah, ali pa v krajiščih intervala. Poiščimo najprej kritične točke:

$$f'(x) = 1 + \frac{-2(a - x)}{\sqrt{b^2 + (a - x)^2}} = 0$$



Slika 4.15: Točka X z najmanjšo vsoto razdalj od točk A, B in C.

Odtod

$$\begin{aligned} 2(a-x) &= \sqrt{b^2+(a-x)^2} \\ 4(a-x)^2 &= b^2+(a-x)^2 \\ x &= a \pm b/\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Točka $a+b/\sqrt{3}$ v nobenem primeru ni na intervalu $[0,a]$. Točka $a-b/\sqrt{3}$ pa je na intervalu, če je $a \geq b/\sqrt{3}$, če je $a < b/\sqrt{3}$ pa pade ven iz intervala. Obravnavati moramo dva ločena primera: $a \geq b/\sqrt{3}$ in $a < b/\sqrt{3}$.

Če je $a < b/\sqrt{3}$, funkcija $f(x)$ na intervalu $[0,a]$ nima kritičnih točk, torej zavzame svojo največjo in najmanjšo vrednost v robnih točkah: $f(0) = 2\sqrt{a^2+b^2}$ in $f(a) = a+2b$. Za vsak $a < 4b/3$ je $2\sqrt{a^2+b^2} < a+2b$. Ker je v našem primeru $a < b/\sqrt{3} < 4b/3$, mora v tem primeru točka X biti v izhodišču $(0,0)$.

Če je $a \geq b/\sqrt{3}$, je na intervalu $[0,a]$ kritična točka $x_0 = a - b/\sqrt{3}$. V tej točki funkcija f zavzame lokalni minimum, saj je $f'(x) < 0$ levo in $f'(x) > 0$ desno od te točke. V tem primeru ima točka X koordinati $(a-b/\sqrt{3}, 0)$, poltraki, ki točko X povezujejo s točkami A, B in C med seboj pa oklepajo enake kote $2\pi/3$. ■