Poglavje 3

Funkcije dveh in več spremenljivk

3.1 Osnovni pojmi

Definicija 3.1.1. *Funkcija dveh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki* (x, y) *ravninske množice* D *priredi realno število* $z = f(x, y)$*, torej preslikava*

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Funkcija treh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ *prostorske množice* $D \subset \mathbb{R}^3$ *priredi realno število* $u = f(x, y, z)$*, torej preslikava*

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Funkcija n *spremenljivk priredi vsaki točki* $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *podmnožice* $D \subset \mathbb{R}^n$ *realno število* $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, torej je preslikava*

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Množica D *je* definicijsko območje *funkcije* f*.*

Definicijsko območje D funkcije f je lahko dano posebej. Na primer definicijsko območje funkcije

$$f(x, y) = x + y, \quad -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1 \tag{3.1}$$

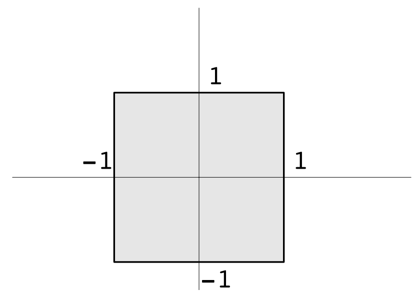
je kvadrat $[-1, 1] \times [1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, ki je na sliki **??**. Če definicijsko območje funkcije ni posebej navedeno, je to največja množica, kjer ima predpis f še smisel.

Primer 3.1.1.

1. Definicijsko območje funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \tag{3.2}$$

   je kvadrat $[-1,1] \times [1,1] \subset \mathbb{R}^2$ na sliki **??**.



Slika 3.1: Definicijsko območje funkcij (**??**) in (**??**)

2. Ploščina pravokotnega trikotnika s katetama a in b je funkcija spremenljivk a in b: $S(a,b) = \frac{1}{2}ab$. Njeno definicijsko območje je prvi kvadrant: $a > 0$ in $b > 0$.

3. Definicijsko območje funkcije $f(x,y,z) = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$ je

$$D = \{\boldsymbol{r} = (x,y,z);\ |\boldsymbol{r}|^2 = x^2+y^2+z^2 \le 1\},$$

   torej polna krogla s polmerom 1 okrog koordinatnega izhodišča.

4. Funkcija

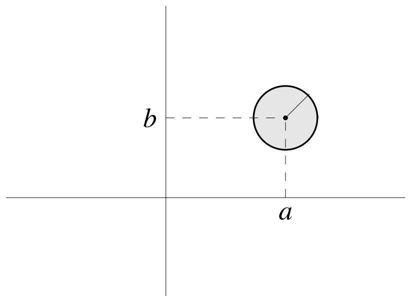
$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = |\boldsymbol{x}|^2$$

   pa je definirana na celem prostoru $\mathbb{R}^n$. ■

Podobno kot na realni osi $\mathbb{R}$, je tudi v ravnini $\mathbb{R}^2$, v prostoru $\mathbb{R}^3$ in nasploh v vseh prostorih $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, definiran pojem ε-*okolice* dane točke $\boldsymbol{a}$. To je množica vseh točk, ki so od $\boldsymbol{a}$ oddaljene za manj kot $\varepsilon > 0$..

Tako je ε-okolica točke $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ krog

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2$$



Slika 3.2: ϵ-okolica točke v ravnini.

okrog točke (a, b) s polmerom ε (na sliki **??**). ε-okolica točke $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, je krogla

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 < \varepsilon^2$$

s središčem v točki (a, b, c) in polmerom ε, v prostoru $\mathbb{R}^n$, $n > 3$ pa je ε-okolica točke $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ množica, dana z neenačbo

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \varepsilon, \quad \text{torej}$$

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \varepsilon^2.$$

O funkciji dveh *neodvisnih* spremenljivk lahko govorimo le, če je definicijsko območje D res prava ravninska množica, tako da se lahko koordinati (x, y) vsaj na delu množice D spreminjata neodvisno druga od druge. Na primer krog ali kvadrat sta taki množici, medtem ko premica in nasploh krivulja v ravnini ni taka množica in zato ne more biti definicijsko območje funkcije dveh spremenljivk. Bolj natančno, množica $D \subset \mathbb{R}^2$ je lahko definicijsko območje funkcije dveh spremenljivk, če vsebuje kakšno ε-okolico vsaj ene svoje točke. Podobno velja za funkcije n spremenljivk, $n \geq 3$: podmnožica $D \subset \mathbb{R}^n$ je lahko definicijsko območje funkcije n spremenljivk, če vsebuje kakšno ε-okolico vsaj ene svoje točke.

Geometrijska slika

Funkcijo dveh spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lahko geometrijsko ponazorimo z njenim grafom

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z);\ (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3,$$

ki predstavlja neko ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$.

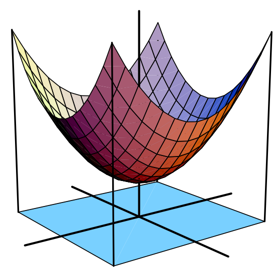
Pravokotna projekcija te ploskve na ravnino $z = 0$ je definicijsko območje funkcije D, pravokotna projekcija na os z pa je njena zaloga vrednosti.

Primer 3.1.2.

1. Graf funkcije $f(x, y) = ax + by + c$ je ravnina $z = ax + by + c$.

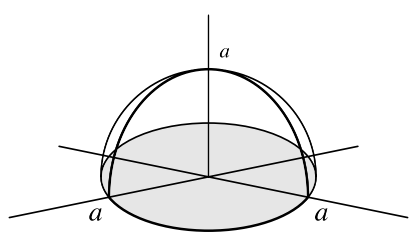
2. Graf funkcije $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$ imenujemo *eliptični paraboloid*. Definicijsko območje je cela ravnina, na sliki **??** pa je del paraboloida nad pravokotnikom

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, \quad -1 \leq y \leq 1.$$



Slika 3.3: Graf funkcije $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$

3. Graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ je zgornja polovica sfere s središčem v izhodišču in polmerom a, ki je na sliki **??**. Definicijsko



Slika 3.4: Zgornja polkrogla

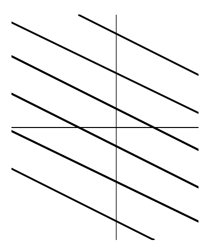
območje D je zaprt krog v ravnini, zaloga vrednosti pa $[0, a]$. ■

Funkcijo dveh spremenljivk si lahko geometrično ponazorimo tudi drugače. Naj bo $c \in \mathbb{R}$ število iz zaloge vrednosti funkcije f. Enačba $f(x, y) = c$ določa (pri določenih predpostavkah — glej izrek **??**) implicitno dano krivuljo v območju D, ki ji pravimo *nivojska krivulja* funkcije f. Očitno mora vsaka točka $(x, y) \in D$ ležati na natanko eni nivojski krivulji. Družina vseh nivojskih krivulj $f(x, y) = c$ napolni celotno območje D, ko c preteče vse vrednosti funkcije f, tako da vsaka točka iz D leži na natanko eni krivulji. Nivojske krivulje se pogosto uporabljajo — na primer, izobare na vremenski karti so nivojske krivulje funkcije, ki predstavlja zračni tlak v točkah na površini, ki jo karta pokriva. Izohipse na zemljevidu pa predstavljajo nivojske krivulje funkcije, ki meri nadmorsko višino.

Poglejmo zgornje tri primere še na ta način.

Primer 3.1.3.

1. Nivojske krivulje funkcije $f(x, y) = ax + by + c$ so vzporedne premice na sliki **??**.



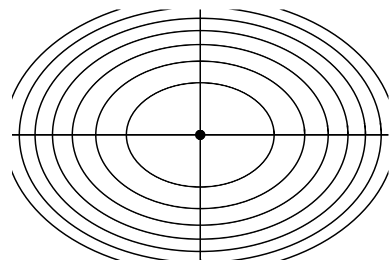
Slika 3.5: Nivojske krivulje linearne funkcije $ax + by + c$

2. Nivojske krivulje funkcije $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$ so koncentrične elipse na sliki **??**.

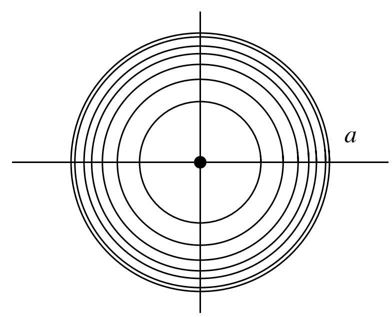
3. Nivojske krivulje funkcije $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ pa so koncentrične krožnice $x^2 + y^2 = c^2,\ 0 \leq c \leq a$ (glej sliko **??**). ■

Graf funkcije treh spremenljivk

$$\Gamma(f) = \{(x, y, z, f(x, y, z)\} \subset D \times \mathbb{R}$$



Slika 3.6: Nivojske krivulje funkcije $1 + x^2 + 2y^2$



Slika 3.7: Nivojske krivulje funkcije $\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

je podmnožica prostora $\mathbb{R}^4$, torej ga ne moremo več "narisati". Lahko pa tako funkcijo geometrijsko predstavimo s pomočjo nivojskih ploskev. Naj bo c neka vrednost funkcije f. Enačba $f(x, y, z) = c$ predstavlja (pri določenih pogojih) ploskev v definicijskem območju D funkcije f, ki jo imenujemo *nivojska ploskev*. Družina vseh nivojskih ploskev napolni celo območje D tako, da se posamezne ploskve med seboj ne sekajo.

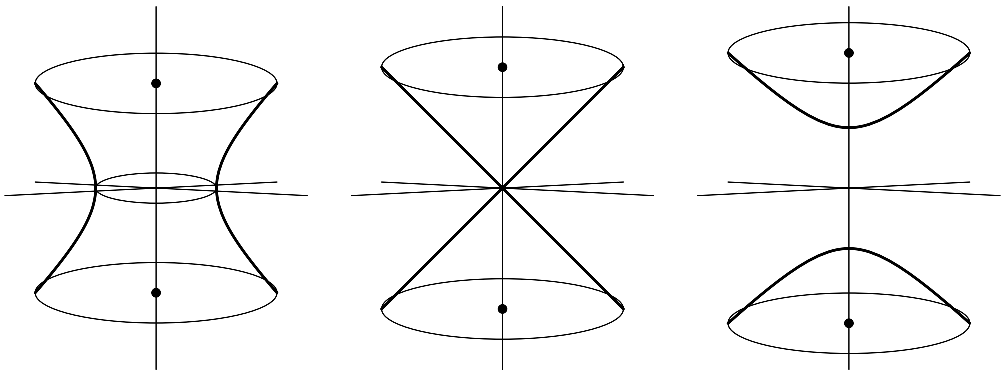
Primer 3.1.4.

1. Nivojske ploskve funkcije $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ so sfere s polmerom ≤ 1, ki napolnijo enotsko kroglo v $\mathbb{R}^3$.

2. Naj bo $u = x^2 + y^2 - z^2$. Nivojske ploskve

$$x^2 + y^2 - z^2 = c$$

so *enodelni hiperboloidi*, če je $c > 0$, *dvodelni hiperboloidi*, če je $c < 0$, nivojska ploskev $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ pa je *stožec*. Skupaj napolnijo cel prostor $\mathbb{R}^3$, ko c preteče vsa realna števila. ■



Slika 3.8: Nivojske ploskve funkcije $x^2 + y^2 - z^2$

Pri funkcijah več kot treh spremenljivk pa kakšna preprosta geometrijska ponazoritev ni več mogoča.

3.2 Zvezne funkcije več spremenljivk

Definicija zveznosti funkcije dveh ali več spremenljivk v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots a_n)$ je prav taka kot pri funkcijah ene same spremenljivke. Naj bo D (tako kot doslej) definicijsko območje funkcije f.

Definicija 3.2.1. *Funkcija dveh spremenljivk $f(x, y)$ je v točki (a, b) iz definicijskega območja D zvezna, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je*

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon,$$

za vsak $(x, y) \in D$, ki je od točke (a, b) oddaljen za manj kot δ, tj.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2.$$

Na splošno: funkcija n spremenljivk $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ je v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n) \in D$ zvezna, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| < \varepsilon,$$

za vsak $\boldsymbol{x} \in D$*, ki je od* $\boldsymbol{a}$ *oddaljen za manj kot* δ*, tj.*

$$(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2.$$

Primer 3.2.1. Funkcija $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, ki točki priredi njeno i-to koordinato, je zvezna v vsaki točki $\boldsymbol{a}$. Če je namreč $\boldsymbol{x}$ v ε-okolici točke $\boldsymbol{a}$, je

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < \varepsilon^2,$$

torej je

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots a_n)| = |x_i - a_i| \leq \sqrt{\sum_{1}^{i=n} (x_i - a_i)^2} < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke je zveznost funkcije tesno povezana s pojmom limite funkcije.

Definicija 3.2.2. *Število* l *je* limita *funkcije* $f(x, y)$*, ko gre točka* (x, y) *proti točki* (a, b)*,*

$$l = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y),$$

če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ *tak* $\delta > 0$*, da je*

$$|f(x, y) - l| < \varepsilon,$$

če je

$$0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2.$$

Na splošno: število l *je* limita *funkcije* $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$*, ko gre* $\boldsymbol{x}$ *proti* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$*,*

$$l = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(x_1, \ldots, x_n),$$

če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ *tak* $\delta > 0$*, da je*

$$|f(x_1, \ldots, x_n) - l| < \varepsilon,$$

če je $\boldsymbol{x}$ *oddaljen od* $\boldsymbol{a}$ *za manj kot* δ*:*

$$0 < (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2.$$

Limita funkcije je definirana samo takrat, kadar je poljubno blizu točke $\boldsymbol{a}$ kakšna točka $\boldsymbol{x} \in D$. Drugače povedano, v vsaki ε-okolici točke $\boldsymbol{a}$ mora biti vsebovana vsaj ena točka $\boldsymbol{x} \in D$.

Iz obeh definicij sledi, da velja tudi za funkcije dveh ali več spremenljivk podobna zveza med zveznostjo in limito kot za funkcije ene spremenljivke:

Izrek 3.2.1. *Funkcija f je v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ zvezna natanko takrat, kadar je*
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(x_1, \ldots x_n) = f(a_1, \ldots, a_n).$$

Naj bo $f(x, y)$ funkcija dveh spremenljivk, definirana na neki množici $D \subseteq \mathbb{R}^2$, in $\boldsymbol{a} = (a, b) \in D$ notranja točka. Če predpišemo spremenljivki y vrednost b (torej, če se omejimo na točke $(x, b) \in D$, ki imajo koordinato y enako b), dobimo funkcijo ene spremenljivke:
$$f_1(x) = f(x, b).$$
Prav tako dobimo funkcijo ene spremenljivke
$$f_2(y) = f(a, y),$$
če predpišemo vrednost $x = a$. Če je $f(x, y)$ zvezna v točki (a, b), je očitno f_1 zvezna v točki a, f_2 pa v točki b. Obratno pa ne velja vedno — lahko se zgodi, da sta f_1 in f_2 zvezni v točkah a oziroma b,
$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$$
pa ne obstaja, torej $f(x, y)$ ne more biti zvezna v točki (a, b).

Primer 3.2.2.

1. Vzemimo funkcijo
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
in točko $(0, 0)$. V tem primeru je $f_1(x) = 0$ za vsak x in $f_2(y) = 0$ za vsak y, torej sta obe zvezni funkciji v vsaki točki. Vendar pa
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$
ne obstaja, saj za vse točke na premici $y = x$, $x \neq 0$, (tudi poljubno blizu točke $(0, 0)$) velja $f(x, y) = 1$, za točke na premici $y = -x$, $x \neq 0$, pa je $f(x, y) = -1$.

2. Poljubna funkcija oblike
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\eta_1(x, y)x + \eta_2(x, y)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ; \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$
kjer sta
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \eta_1(x, y) = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{(x,y) \to (0,0)} \eta_2(x, y) = 0,$$
je zvezna, saj je $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$. To se hitro vidi, če funkcijo f izrazimo v polarnih koordinatah:
$$\begin{aligned} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \frac{\eta_1 r \cos \varphi + \eta_2 r \sin \varphi}{r} \\ &= \eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi, \end{aligned}$$
torej je
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} (\eta_1 \cos \varphi + \eta_2 \sin \varphi) = 0.$$
■

S funkcijo n-spremenljivk $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je na podoben način določenih n funkcij

$$f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots n,$$

ene spremenljivke. Če je f zvezna v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots a_n) \in D$, je vsaka funkcije f_i zvezna v točki a_i.

Tako kot za funkcije ene spremenljivke velja tudi za funkcije več spremenljivk, da so vsota, razlika in produkt zveznih funkcij spet zvezne funkcije, kvocient f/g zveznih funkcij pa je zvezna funkcija povsod, kjer je definiran (torej tam, kjer je imenovalec različen od 0).

Primer 3.2.3. Funkciji

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

pravimo *kvadratna funkcija* ali *polinom druge stopnje dveh spremenljivk.* Splošneje:

$$f(x, y) = (a_{n0}x^n + a_{n1}x^{n-1}y + \cdots + a_{nn}y^n) + \cdots + (a_{10}x + a_{11}y) + a_{00}$$

je *polinom dveh spremenljivk stopnje* n. Polinom dveh spremenljivk je očitno zvezna funkcija v vsaki točki $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Podobno definiramo polinom n spremenljivk (le da je v tem primeru členov različne oblike še toliko več), ki je zvezen v vsaki točki $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. ■

Definicija 3.2.3. *Funkcija $f(x, y)$ je* enakomerno zvezna *na neki množici $D \subset \mathbb{R}^2$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je*

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

za vsak par točk (x, y) in (x', y') iz D, za katerega velja

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 < \delta^2.$$

Funkcija n spremenljivk $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ je enakomerno zvezna *na množici $D \subset \mathbb{R}^n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x'})| = |f(x_1, \dots, x_n) - f(x'_1, \dots, x'_n)| < \varepsilon,$$

za vsak par točk $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{x'}$, ki zadoščata pogoju

$$(x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2 < \delta^2.$$

Funkcija je torej enakomerno zvezna na neki množici D, če se za vsak par točk, ki sta oddaljeni za manj kot δ, funkcijski vrednosti v teh točkah razlikujeta za manj kot ε.

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ poljubna podmnožica ravnine. Pravimo, da je točka $x \in D$ *notranja točka* množice D, če je kakšna njena ε- okolica vsebovana v D. Točka $x \in \mathbb{R}^2$ je *zunanja točka* množice D, če kakšna njena ε-okolica ne seka množica D. In nazadnje, točka $x \in \mathbb{R}^2$ je *robna točka* množice D, če vsebuje vsaka njena ε okolica tako točke iz D kot tudi točke, ki niso v D.

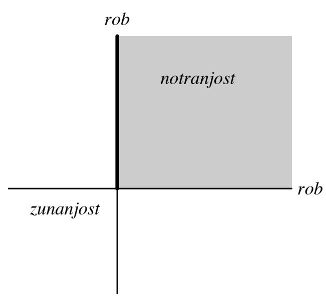
Primer 3.2.4. Za množico

$$D = \{(x, y);\ y > 0 \text{ in } x \geq 0\},$$

ki je na sliki **??**, so točke za katere velja

$x > 0$ in $y > 0$	notranje točke,
$x < 0$ ali $y < 0$	zunanje točke in
$(x = 0$ in $y \geq 0)$ ali $(y = 0$ in $x \geq 0)$	robne točke.

■



Slika 3.9: Množica D

Vse notranje točke množice D so očitno vsebovane v D, vse zunanje točke pa so vsebovane v komplementu množice D. Robne točke pa so lahko vsebovane v D (na primer vsaka točka $(0, y)$, $y > 0$ v zgornjem primeru je vsebovana v D), ali pa so vsebovane v komplementu množice (na primer točke $(0, x)$ $x \geq 0$ v zgornjem primeru).

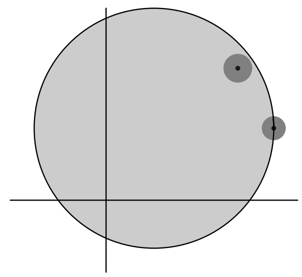
Če množica D ne vsebuje nobene svoje robne točke, torej, če so vse točke $(x, y) \in D$ notranje točke, pravimo, da je D *odprta množica.* Če pa D vsebuje vse svoje robne točke pa pravimo, da je D *zaprta množica.*

Primer 3.2.5. Krog

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2$$

je odprta podmnožica ravnine. Če temu krogu dodamo še robno krožnico,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2,$$



Slika 3.10: Odprta in zaprta množica v ravnini.

dobimo zaprto podmnožico ravnine (glej sliko **??**). ■

Na podoben način definiramo odprte in zaprte množice v prostoru $\mathbb{R}^3$ in nasploh v vseh prostorih $\mathbb{R}^n$.

Funkcija f, ki je enakomerno zvezna na množici D, je očitno zvezna v vsaki točki $\boldsymbol{a} \in D$, saj enakomerna zveznost zagotavlja, da za vsak ε obstaja tak δ, da bo

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon$$

za vsak $\boldsymbol{x}$ iz δ-okolice točke $\boldsymbol{a}$. Obratno pa ne velja. Lahko se zgodi, da je funkcija f zvezna v vsaki točki $\boldsymbol{x} \in D$, pa ni enakomerno zvezna na množici D. Na primer, funkcija

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

je definirana povsod, razen v točki $(0,0)$, torej na odprti množici $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, in zvezna v vsaki točki $(x,y) \in D$, enakomerno zvezna pa ni. Veljata pa naslednja dva izreka:

Izrek 3.2.2. *Funkcija f, ki je zvezna v vsaki točki* zaprte in omejene množice *D, je enakomerno zvezna na D.*

Izrek 3.2.3. *Funkcija f, ki je zvezna na zaprti in omejeni množici D, je na množici D* omejena*, torej obstajata* natančna spodnja meja *m in* natančna zgornja meja *M, tako da je*

$$m \leq f(\boldsymbol{x}) \leq M \quad \textit{za vsak} \quad \boldsymbol{x} \in D.$$

Poleg tega obstajata točki $\boldsymbol{x_m}$ in $\boldsymbol{x_M}$ v množici D, v katerih funkcija ti vrednosti tudi zavzame, torej

$$f(\boldsymbol{x_m}) = m \quad \textit{in} \quad f(\boldsymbol{x_M}) = M.$$

Oba izreka smo že srečali pri funkcijah ene spremenljivke — namesto zaprte množice D je tam nastopal zaprt interval $[a,b]$. Tudi dokaza, ki ju tu ne bomo navedli (najdemo ju v [**?**]), sta podobna kot pri funkcijah ene spremenljivke.

Pojem zaprte množice $D \subset \mathbb{R}^n$ je torej nekakšna posplošitev pojma zaprtega intervala $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pojem odprte množice pa je posplošitev pojma odprtega intervala.

3.3 Diferenciabilne funkcije

3.3.1 Parcialni odvodi

Vzemimo funkcijo $z = f(x, y)$, ki je zvezna v točki $(a, b) \in D$. Če predpišemo vrednost $y = b$, je z odvisna le še od spremenljivke x, dobljena funkcija $f_1(x) = f(x, b)$ pa je zvezna. Prav tako je zvezna funkcija $f_2(y)$, ki jo dobimo tako, da predpišmo vrednost spremenljivke $x = a$.

Definicija 3.3.1. *Če obstaja limita diferenčnega kvocienta*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h},$$

jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x *in označimo z*

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \textit{ali} \quad f_x(x, y).$$

Če obstaja

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k},$$

jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y *in označimo z*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \textit{ali} \quad f_y(x, y).$$

Podobno definiramo parcialne odvode funkcije n spremenljivk, le da v tem primeru dobimo n parcialnih odvodov.

Naj bo $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ zvezna funkcija n spremenljivk. Če predpišemo vrednosti vseh spremenljivk razen i-te, $1 \le i \le n$, dobimo zvezno funkcijo spremenljivke x_i.

Definicija 3.3.2. *Če obstaja limita*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x_i *in označimo z*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \textit{ali} \quad f_{x_i}(x, y).$$

Funkcija n spremenljivk ima torej n parcialnih odvodov prvega reda, ki skupaj sestavljajo vektor z n komponentami. Imenujemo ga *gradient* funkcije f:

$$\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}).$$

Primer 3.3.1.

1. Zapišimo parcialna odvoda funkcije $f(x, y) = x^y$:
$$f_x(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y(x, y) = x^y \log x.$$
2. Parcialni odvodi funkcije $u = z \arcsin(x/y)$ so:
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{z}{y\sqrt{1 - x^2/y^2}} = \frac{|y|z}{y\sqrt{y^2 - x^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{xz}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \arcsin \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

■

3.3.2 Totalni diferencial

Definicija 3.3.3. *Funkcija dveh spremenljivk $z = f(x, y)$ je v točki (a, b)* diferenciabilna*, če obstajata oba parcialna odvoda $A = f_x(a, b)$ in $B = f_y(a, b)$ in je*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, a + k) - f(a, b) - (Ah + Bk)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Izraz

$$dz = Ah + Bk = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

imenujemo totalni diferencial.

Podobno je funkcija $n > 2$ spremenljivk $y = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ diferenciabilna*, natanko tedaj, kadar obstajajo vsi parcialni odvodi $A_i = f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$, $i = 1, \ldots, n$ in je*

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{f(a_1{+}h_1, \ldots, a_n{+}h_n){-}f(a_1, \ldots, a_n){-}(A_1h_1{+}\cdots{+}A_nh_n)}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0,$$

izraz

$$dy = A_1h_1 + \cdots + a_nh_n = f_{x_1}h_1 + \cdots + f_{x_n}h_n$$

pa je totalni diferencial*.*

Če je funkcija $f(x,y)$ diferenciabilna v točki (a,b), je

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=(Ah+Bk)+\eta\sqrt{h^2+k^2},$$

kjer gre η proti 0, ko gre $h\to 0$ in $k\to 0$. Totalni diferencial $Ah+Bk$ je torej pri diferenciabilni funkciji dobra ocena za spremembo funkcijske vrednosti $f(a+h,b+k)-f(a,b)$, vrednost funkcije v točki $(a+h,b+k)$ pa lahko ocenimo z linearnim izrazom

$$f(a+h,b+k)\doteq f(a,b)+f_x(a,b)h+f_y(a,b)k=f(a,b)+df.$$

Primer 3.3.2.

1. Vzemimo funkcijo $z=x/y$. Njen totalni diferencial je

$$dz=\frac{1}{y}\,dx-\frac{x}{y^2}\,dy=\frac{ydx-xdy}{y^2}.$$

Odtod dobimo približek za relativno napako kvocienta dveh izmerjenih količin, če sta napaki pri merjenju enaki dx in dy:

$$\frac{dz}{z}=\frac{ydx-xdy}{y^2(x/y)}=\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}.$$

2. Izračunajmo z diferencialom približno vrednost izraza

$$\frac{(0.99)(0.98)}{0.97}\,.$$

Diferencial funkcije

$$f(x,y,z)=\frac{xy}{z}\qquad\text{je}$$

$$df=f_xdx+f_ydy+f_zdz=\frac{y}{z}dx+\frac{x}{z}dy-\frac{xy}{z^2}dz.$$

Njegova vrednost v točki $(1,1,1)$ pri danih spremembah neodvisnih spremenljivk $dx=-0.01$, $dy=-0.02$, $dz=-0.03$ je:

$$df=-0.01-0.02+0.03=0,$$

torej je

$$f(0.99,0.98,0.97)\doteq f(1,1,1)+df=1$$

(vrednost, natančno izračunana na 5 decimalk je, 1.00021).

3. Izračunajmo, za koliko se približno spremeni prostornina stožčaste posode z višino $h = 10$ cm in največjim polmerom $R = 5$ cm, če se višina h poveča za 2 mm, polmer R pa pomanjša za 2 mm.

   Prostornina stožca je $V = \pi R^2 h/3$. Totalni diferencial funkcije $V(h, R)$ je
   $$dV = \frac{\pi}{3}[2RhdR + R^2 dh].$$
   V našem primeru je (v cm) $R = 5$, $h = 10$, spremembi neodvisnih spremenljivk pa sta $dR = -0.2$ in $dh = 0.2$, torej
   $$dV = \frac{\pi}{3}[2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot (-0.2) + 25 \cdot 0.2] = -5\pi \doteq -15.7.$$
   ■

Diferenciabilnost funkcije je strožji pogoj kot parcialna odvedljivost — lahko se zgodi, da vsi parcialni odvodi prvega reda obstajajo, pa funkcija vseeno ni diferenciabilna. Vendar pa velja:

Izrek 3.3.1. *Zvezna funkcija $z = f(x, y)$ je diferenciabilna, če sta parcialna odvoda $f_x(x, y)$ in $f_y(x, y)$ zvezna.*

Dokaz. Naj bo
$$\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) + f(x+h, y) - f(x, y)$$
Po Lagrangeovem izreku je
$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x+h, y) &= f_y(x+h, y+\vartheta_1 k)k \quad \text{in} \\ f(x+h, y) - f(x, y) &= f_x(x+\vartheta_2 h, y)h. \end{aligned}$$
Ker sta oba parcialna odvoda f_x in f_y zvezni funkciji, je
$$f_y(x+h, y+\vartheta_1 k) = f_y(x, y) + \eta_1$$
$$f_x(x+\vartheta_2 h, y) = f_x(x, y) + \eta_2,$$
kjer gre $\eta_1 \to 0$ in $\eta_2 \to 0$, ko gre $h \to 0$ in $k \to 0$. Torej je
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y) - (f_x h + f_y k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\eta_1 h + \eta_2 k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$
to pa je enako 0 (glej primer **??**). □

3.3.3 Odvod posredne funkcije

Večinoma pravila za odvajanje funkcij ene spremenljivke (na primer pravilo za odvod vsote in produkta) veljajo skoraj dobesedno v isti obliki tudi za parcialno odvajanje funkcij več spremenljivk. Izjema je pravilo za posredno odvajanje ali *verižno pravilo*, ki izgleda malo drugače in ga bomo zapisali v več oblikah.

Naj bo funkcija $z = f(x, y)$ diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta odvedljivi funkciji parametra t, torej $x = x(t)$, $y = y(t)$. Potem je tudi $z = f(x(t), y(t))$ posredna funkcija parametra t in njen odvod je

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h}.$$

Naj bo $\Delta x = x(t+h) - x(t)$ in $\Delta y = y(t+h) - y(t)$. Potem je

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x \Delta x + f_y \Delta y + \eta\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} f_x \cdot \frac{\Delta x}{h} + f_y \cdot \frac{\Delta y}{h} + \eta \frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \end{aligned}$$

Ker sta $x(t)$ in $y(t)$ odvedljivi funkciji, je

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta x}{h} = x'(t) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\Delta y}{h} = y'(t),$$

ker pa je f diferenciabilna, je $\lim_{h\to 0} \eta = 0$ in

$$\lim_{h\to 0} \eta \frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \lim_{h\to 0} \eta \left(\pm\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\right) = 0.$$

Od tod sledi, da je

$$\frac{dz}{dt} = f_x x'(t) + f_y y'(t). \tag{3.3}$$

Primer 3.3.3. Pravilo (**??**) lahko včasih uporabimo za računanje odvodov funkcije ene spremenljivke. Izračunajmo odvod funkcije $z = (1+t)^{2t^2}$. Vzemimo $x = 1 + t$ in $y = 2t^2$, tako da je

$$z = f(x, y) = x^y.$$

Potem je

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t) = yx^{y-1} + x^y \log x\, 4t \\ &= 2t^2(1+t)^{2t^2-1} + 4t(1+t)^{2t^2}\log(1+t).\end{aligned}$$

■

Odvod dz/dt si lahko predstavljamo kot odvod funkcije f vzdolž krivulje, ki je dana v parametrični obliki s predpisoma $x = x(t)$ in $y = y(t)$.

Naj bo funkcija $z = f(x, y)$ diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta diferenciabilni funkciji novih spremenljivk u in v, torej $x = x(u, v)$ in $y = y(u, v)$. Potem je z posredno odvisna od spremenljivk u in v in velja

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Nazadnje si oglejmo še povsem splošno obliko verižnega pravila. Naj bo $z = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferenciabilna funkcija n spremenljivk, kjer je $n \geq 1$, te pa naj bodo diferenciabilne funkcije $m \geq 1$ novih spremenljivk, torej $x_j = x_j(t_1, \ldots, t_m)$ za vsak $j = 1, \ldots, n$. Potem je z posredno odvisna od $t_1, \ldots, t_m$ in za vsak $i = 1, \ldots, m$ velja:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}.$$

Primer 3.3.4. Naj bo $z = f(r)$ in $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ polarni polmer. Potem je:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r} \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}.$$

■

Smerni odvod

Parcialni odvod $f_x(a, b)$ opisuje hitrost spreminjanja funkcije f, če se iz točke (a, b) pomaknemo po premici, ki je vzporedna osi x, torej v smeri vektorja $(1, 0)$. Podobno opisuje $f_y(a, b)$ hitrost spreminjanja funkcije f, če se iz (a, b) pomaknemo v smeri vektorja $(0, 1)$.

Vzemimo poljuben vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ dolžine $|\boldsymbol{v}| = 1$.

Definicija 3.3.4. Smerni odvod *funkcije* f *v točki* (a, b) *v smeri vektorja* $\boldsymbol{v}$ *je*

$$f_{\boldsymbol{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv_1, b + hv_2) - f(a, b)}{h}.$$

Smerni odvod funkcije f v smeri vektorja $\boldsymbol{v}$ je torej enak odvodu funkcije f vzdolž premice

$$x(t) = a + v_1 t, \quad y(t) = b + v_2 t \tag{3.4}$$

skozi (a, b) s smernim vektorjem $\boldsymbol{v}$ dolžine 1 in meri hitrost, s katero se spreminja vrednost funkcije f, če se iz točke (a, b) pomaknemo v smeri vektorja $\boldsymbol{v}$. Če pišemo $z(t) = f((x(t), y(t))$, je $f(a, b) = z(0)$. Iz formule za posredno odvajanje (**??**) sledi, da je

$$\frac{dz}{dt} = v_1 f_x(x(t), y(t)) + v_2 f_y(x(t), y(t)).$$

V dobljeni izraz vstavimo $t = 0$ in dobimo formulo za računanje smernega odvoda

$$f_{\boldsymbol{v}}(a, b) = \frac{dz}{dt} = v_1 f_x(a, b) + v_2 f_y(a, b) = \operatorname{grad} f(a, b) \cdot \boldsymbol{v}. \tag{3.5}$$

Poglejmo dva posebna primera smernega odvoda.

Trditev 3.3.2. *Naj bo* (a, b) *nestacionarna točka funkcije* f, *tako da je vektor* $\operatorname{grad} f(a, b)$ *neničelen. Smerni odvod* $f_{\boldsymbol{v}}(a, b)$ *ima največjo vrednost takrat, kadar ima enotski vektor* $\boldsymbol{v}$ *smer gradienta* $\operatorname{grad} f(a, b)$.

Dokaz. Ker je skalarni produkt vektorjev $\boldsymbol{v}$ in $\operatorname{grad} f(a, b)$ enak

$$\boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(a, b) = |\boldsymbol{v}| |\operatorname{grad} f(a, b)| \cos \varphi, \tag{3.6}$$

kjer je φ kot med obema vektorjema, je smerni odvod v točki (a, b) največji takrat, kadar je $\cos \varphi = 1$, to pa je natanko takrat, ko je

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad} f(a, b) / |\operatorname{grad} f(a, b)|$$

enotski vektor v smeri gradienta. □

Zgornja trditev pove, da kaže vektor $\operatorname{grad} f(a, b)$ iz točke (a, b) v smer, v kateri funkcijska vrednost $f(x, y)$ najhitreje narašča. Poglejmo povsem praktično (včasih tudi boleče) posledico tega dejstva. Naj bo $f(x, y)$ funkcija, ki opisuje nadmorsko višino točke v odvisnosti od njenih koordinat (x, y) na zemljevidu. Če nam v točki, ki ima na zemljevidu koordinati (a, b) na poledenelem bregu zdrsne, bomo drveli navzdol v smeri, ki je nasprotna smeri gradienta funkcije, hitrost pa je tem večja, čim večja je velikost vektorja $\operatorname{grad} f(a, b)$.

Trditev 3.3.3. *Spet naj bo (a,b) nestacionarna točka funkcije f in naj bo vektor $\boldsymbol{v}$ pravokoten na vektor* $\operatorname{grad} f(a,b)$. *Vektor $\boldsymbol{v}$ v tem primeru kaže iz točke (a,b) v smeri tangentnega vektorja na nivojsko krivuljo funkcije f v točki (a,b).*

Dokaz. Trditev bomo dokazali samo v primeru, ko je $f_y(a,b) \neq 0$. Skličemo se na izrek o implicitni funkciji **??**, ki ga bomo dokazali v razdelku **??** in ki pove, da lahko na nivojski krivulji $f(x,y) = f(a,b)$ v okolici točke (a,b) zvezo med koordinatama opišemo z odvedljivo funkcijo $y = y(x)$. Če enačbo $f(x, y(x)) = f(a,b)$ odvajamo v skladu s pravilom (**??**), dobimo

$$f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) = 0.$$

V točki $x = a$ torej velja

$$f_x(a,b) + f_y(a,b)y'(a) = 0.$$

To pove, da je vektor $(1, y'(a))$ (tangentni vektor na krivuljo $y = y(x)$ v točki $x = a$) pravokoten na $\operatorname{grad} f(a,b)$, torej mora biti kolinearen z vektorjem $\boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{v}$ v tem primeru kaže iz točke (a,b) v smer, v kateri se funkcijska vrednost $f(x,y)$ skoraj ne spreminja. □

Primer 3.3.5. Naj funkcija $f(x,y) = 2xy + x^2$ opisuje temperaturno porazdelitev v ravnini.

Izračunajmo najprej smerni odvod funkcije v smeri krajevnega vektorja točke $\boldsymbol{r} = (1,1)$. Ker je

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2y + 2x, 2x)$$

in je enotski vektor v dani smeri $\boldsymbol{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, je

$$f_{\boldsymbol{v}}(1,1) = \operatorname{grad} f(1,1) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = (4,2) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}.$$

Določimo smer, v kateri temperatura v točki $(1,1)$ najhitreje narašča. Ker je $\operatorname{grad} f(1,1) = (4,2)$, je to smer vektorja $(4,2)$.

Nazadnje zapišimo enačbo tangente na izotermo, torej na nivojsko krivuljo dane funkcije, skozi točko $(1,1)$. Enačba izoterme je

$$2xy + x^2 = 3.$$

Vektor $\boldsymbol{t}$ v smeri tangente je pravokoten na vektor $\operatorname{grad} f(1,1) = (4,2)$, torej $\boldsymbol{t} = (-2,4)$. Enačba tangente v parametrični obliki je tako

$$x = 1 - 2\lambda, \quad y = 1 + 4\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Izračunajmo še smerni odvod v smeri krajevnega vektorja te točke.

$$f_{\boldsymbol{r}}(1,1) = (4,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = 3\sqrt{2}.$$

■

Podobno kot za funkcijo dveh spremenljivk definiramo tudi smerni odvod funkcije treh ali več spremenljivk $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ v smeri vektorja $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ dolžine $|\boldsymbol{v}| = 1$ s predpisom

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{h},$$

izračunamo pa ga s pomočjo formule

$$f_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}).$$

3.3.4 Višji parcialni odvodi in Taylorjeva formula

Parcialna odvoda funkcije dveh spremenljivk $z = f(x,y)$ sta spet funkciji dveh spremenljivk $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$ in lahko se zgodi, da sta parcialno odvedljivi. Njune parcialne odvode imenujemo *parcialni odvodi funkcije f drugega reda.* Parcialni odvodi drugega reda so štirje:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f_x}{\partial x}, \qquad & f_{xy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}, \\ f_{yx} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \qquad & f_{yy} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f_y}{\partial y}. \end{aligned}$$

Funkcija n spremenljivk $f(x_1, \ldots, x_n)$ ima n^2 parcialnih odvodov drugega reda:

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Vsi drugi parcialni odvodi funkcije f sestavljajo kvadratno matriko reda $n \times n$ (pravimo ji tudi *Hessejeva matrika*):

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1} & \cdots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}.$$

Izrek 3.3.4. *Če druga mešana parcialna odvoda f_{xy} in f_{yx} obstajata in sta zvezni funkciji, sta enaka.*

Dokaz izreka **??** najdemo v [**?**]. Izrek **??** velja tudi za funkcije n spremenljivk: če sta odvoda $f_{x_i x_j}$ in $f_{x_j x_i}$ zvezna, sta enaka.

Vrstni red odvajanja po posameznih spremenljivkah lahko torej zamenjamo, če so vsi vpleteni parcialni odvodi zvezne funkcije.

Pokažimo na primeru, da sta mešana odvoda lahko različna, če nista zvezni funkciji.

Primer 3.3.6. Funkcija, ki ima različna mešana parcialna odvoda drugega reda (in zvezna parcialna odvoda prvega reda):

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{če je} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{če je} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Parcialna odvoda v točkah $(x,y) \neq (0,0)$ sta:

$$f_x = \frac{y(x^4-y^4)+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{x(x^4-y^4)-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Parcialna odvoda v točki $(0,0)$ sta

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

in prav tako

$$f_y(0,0) = 0.$$

Od tod sledi, da je $f_x(0,y) = -y$ za vsak y in $f_y(x,0) = x$ za vsak x. Zato je $f_{xy}(0,0) = -1$ in $f_{yx}(0,0) = 1$.

■

Če druge parcialne odvode funkcije f še naprej odvajamo, dobimo parcialne odvode tretjega in višjih redov. Tudi mešani odvodi višjega reda so neodvisni od vrstnega reda odvajanja, če so zvezni:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m} = \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^i \partial y^j \partial x^{m-i} \partial y^{n-j}} = \dots .$$

Taylorjeva formula

S pomočjo višjih parcialnih odvodov lahko linearno oceno

$$f(x+h, y+k) \doteq f(x,y) + f_x(x,y)h + f_y(x,y)k,$$

ki jo dobimo z diferencialom, izboljšamo. Tako kot funkcije ene spremenljivke, lahko tudi funkcijo dveh spremenljivk razvijemo po *Taylorjevi formuli.*

Izrek 3.3.5. (Taylorjeva formula) *Funkcija $f(x,y)$ naj bo $(n+1)$-krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki v okolici točke (a,b). Potem velja:*

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + [f_x(a,b)h + f_y(a,b)k] + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial^{n-i}x\partial^i y}(a,b)h^{n-i}k^i\right] + R_n, \end{aligned}$$

kjer je

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial^{n+1-i}x\partial^i y}(a+\theta h, b+\theta k)h^{n+1-i}k^i,$$

in $0 \le \theta \le 1$.

Dokaz. Naj bo $0 \le t \le 1$. S predpisom

$$F(t) = f(a+th, b+tk)$$

je dana funkcija ene spremenljivke t, ki je $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva v točki $t=0$. Zapišimo njeno Taylorjevo formulo:

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2!}F''(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0) + R_n. \qquad (3.7)$$

Če upoštevamo, da je $x = a+th$ in $y = b+th$, lahko s posrednim odvajanjem izračunamo koeficiente v tem razvoju:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt}f(a+th,b+tk) \\ &= f_x(a+th,b+tk)x'(t) + f_y(a+th,b+tk)y'(t) \\ F'(0) &= f_x(a,b)h + f_y(a,b)k \\ F''(t) &= \frac{d}{dt}(f_x(a+th,b+tk)h + f_y(a+th,b+tk)k) \\ &= (f_{xx}(a+th,b+tk)h + f_{xy}(a+tk,b+th)k)h \\ &\quad +(f_{yx}(a+th,b+tk)h + f_{yy}(a+th,b+tk)k)k \\ F''(0) &= f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Z matematično indukcijo se zlahka prepričamo, da je za vsak $n \ge 1$

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) &= \frac{\partial^n f}{\partial^n x}h^n + n\frac{\partial^n f}{\partial^{n-1}x\partial y}h^{n-1}k + \cdots + n\frac{\partial^n f}{\partial x\partial^{n-1}y}hk^{n-1} + \frac{\partial^n f}{\partial^n y} \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial^{n-i}x\partial^i y}(a,b)h^{n-i}k^i. \end{aligned}$$

Izrek je dokazan, če dobljene odvode vstavimo v enačbo (**??**) in upoštevamo, da je

$$f(a+h, b+k) = F(1).$$

□

Ostanek R_n je napaka, ki jo naredimo, če vrednost $f(a+h, b+k)$ ocenimo z vsoto členov reda $\leq n$ v Taylorjevi formuli. Če je funkcija $f(x,y)$ neskončnokrat parcialno odvedljiva na obe spremenljivki in če je

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$$

lahko Taylorjevo formulo nadomestimo s Taylorjevo vrsto:

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial f^n}{\partial x^{n-i} \partial y^i} h^{n-1} k^i \right).$$

Člen prve stopnje v Taylorjevi formuli je totalni diferencial in ga lahko opišemo kot skalarni produkt vektorjev $(f_x(a,b), f_y(a,b))$ in (h,k):

$$df = (f_x(a,b), f_y(a,b)) \cdot (h,k) = f_x(a,b)h + f_y(a,b)k.$$

Člen druge stopnje v Taylorjevi formuli

$$f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2 = Ah^2 + 2Bhk + Ch^2$$

pa je vrednost kvadratne forme

$$Q(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = [h,k] \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix},$$

ki je določena z matriko drugih parcialnih odvodov (glej razdelek **??**).

Naj bo $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ funkcija n spremenljivk, ki je vsaj trikrat zvezno parcialno odvedljiva v točki $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$,

$$H(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{a}) \\ f_{x_2x_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & f_{x_2x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{a}) & \ldots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix},$$

(simetrična) matrika drugih parcialnih odvodov funkcije v tej točki in

$$Q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^T H(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{h} = [h_1, \ldots, h_n]\, H(\boldsymbol{a}) \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

kvadratna forma določena z matriko $H(\boldsymbol{a})$.

Izrek 3.3.6. (Taylorjeva formula drugega reda) *Če je $\boldsymbol{a}$ notranja točka množice $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ vsaj trikrat zvezno parcialno odvedljiva, je*

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) &= f(a_1+h_1,\ldots,a_n+h_n) \\ &= f(\boldsymbol{a}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{h} + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{T}} H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}) + R_3, \end{aligned}$$

kjer se ostanek R_3 izraža s tretjimi parcialnimi odvodi funkcije f v neki vmesni točki $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \vartheta\boldsymbol{h}$ na daljici med $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}$ in je

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3}{|\boldsymbol{h}|^3} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}} \frac{R_3}{\sqrt{(h_1^2+\cdots+h_n^2)^3}} = 0.$$

Dokaz izreka **??** je podoben dokazu izreka **??** in ga bomo izpustili. Najdemo ga na primer v [**?**].

3.4 Implicitne funkcije

Enačba $F(x,y) = 0$ pogosto določa implicitno funkcijo $y = y(x)$. Poglejmo bolj natančno, kdaj.

Izrek 3.4.1. (Izrek o implicitni funkciji v dveh dimenzijah) *Naj bo $F(x,y)$ zvezna in diferenciabilna funkcija v okolici točke (a,b) in naj bo $F(a,b) = 0$. Če je $F_y(a,b) \neq 0$, obstaja odvedljiva funkcija $y = y(x)$, ki je definirana v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$ in zadošča pogojema:*

$$y(a) = b, \quad F(x,y(x)) = 0.$$

Izreka **??** ne bomo dokazali, dokaz najdemo v [**?**].

Razmislimo samo, kaj bi lahko bila vrednost $y(x)$. Ker je $F_y(a,b) \neq 0$, je funkcija $F(a,y)$ monotona v okolici točke b, torej sta za nek dovolj majhen k vrednosti $F(a,b+k)$ in $F(a,b-k)$ različnega znaka. Za vsak x v neki dovolj majhni okolici točke a pa je $F(x,b+k)$ istega znaka kot $F(a,b+k)$. Podobno je za vsak x v neki dovolj majhni okolici točke a vrednost $F(x,b-k)$ istega znaka kot $F(a,b-k)$. Če je x v preseku obeh okolic, sta vrednosti $F(x,b-k)$ in $F(x,b+k)$ različnega znaka, torej ima funkcija $F_2(y) = F(x,y)$ ničlo nekje na intervalu $[a_2-k, a_2+k]$. Ta ničla je vrednost implicitne funkcije $y(x)$.

Primer 3.4.1. Funkcija $F(x,y) = x^2+y^2-1$ ima v točki $(0,-1)$ parcialni odvod $F_y = 2y = -2 \neq 0$, torej obstaja implicitna funkcija $y = -\sqrt{1-x^2}$, ki je definirana na intervalu $(-1,1)$ okrog točke $x = 0$ in zadošča obema pogojema. V točki $(-1,0)$ pa je $F_y = 0$ in implicitne funkcije, ki bi zadoščala zahtevanim pogojem v okolici točke $x = 1$ ne moremo definirati (definirana je samo za $|x| < 1$, pa še tam izbira ni enolična). ■

Odvod implicitne funkcije dobimo tako, da enačbo $F(x, y(x)) = 0$ posredno odvajamo na x:

$$F_x + F_y y'(x) = 0, \quad \text{torej} \quad y'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Primer 3.4.2. Funkcija $F(x, y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4 = 0$ določa implicitno funkcijo v okolici točke $(1, 1)$, kajti

$$F_y = x^2 + 9y^2x^4, \quad \text{torej} \quad F_y(1, 1) = 10 \neq 0.$$

Te funkcije eksplicitno ni lahko izraziti, vendar pa lahko v vsaki točki izračunamo njen odvod

$$y'(x) = -\frac{2xy + 12y^3x^3}{x^2 + 9y^2x^4}, \quad y'(1) = -\frac{14}{10}.$$ ■

Izrek 3.4.2. (Izrek o implicitni funkciji v treh dimenzijah) *Naj bo $F(x, y, z)$ diferenciabilna funkcija in $F(a, b, c) = 0$. Če velja, da je $F_z(a, b, c) \neq 0$, potem obstaja funkcija $z = z(x, y)$, ki je definirana v okolici točke (a, b) in zadošča pogojema*

$$z(a, b) = c, \quad F(x, y, z(x, y)) = 0. \tag{3.8}$$

Parcialna odvoda funkcije $z(x, y)$ dobimo s posrednim odvajanjem enačbe (**??**):

$$F_x + F_z z_x = 0 \quad \text{in} \quad F_y + F_z z_y = 0,$$

torej

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{in} \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Zapišimo še eno obliko izreka o implicitni funkciji:

Izrek 3.4.3. *Diferenciabilni funkciji $F(x, y, z)$ in $G(x, y, z)$, ki imata v točki (a, b, c) hkrati vrednost 0, določata implicitni funkciji $y = y(x)$ in $z = z(x)$, če je determinanta*

$$D = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

Funkciji $y = y(x)$ in $z = z(x)$ sta definirani v okolici točke $a \in \mathbb{R}$ in velja:

$$y(a) = b, \quad z(a) = c, \quad F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = 0,$$

Primer 3.4.3. Funkciji

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \quad \text{in} \quad G(x,y,z) = x + y - z$$

imata v točki $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ vrednost 0, vrednost determinante D v tej točki pa je

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2/\sqrt{2} \neq 0,$$

torej določata implicitni funkciji $y(x)$ in $z(x)$ definirani v okolici točke $x = 1/\sqrt{2}$. V točki $(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ pa je

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

zato implicitni funkciji v okolici točke $x = -2/\sqrt{6}$ nista definirani. ■

Odvoda implicitnih funkcij $y(x)$ in $z(x)$ dobimo tako, da odvajamo enačbi

$$F(x, y(x), z(x)) = 0 \quad \text{in} \quad G(x, y(x), z(x)) = 0$$

in dobimo sistem enačb za y' in z':

$$F_y y' + F_z z' = -F_x,$$

$$G_y y' + G_z z' = -G_x.$$

Odvoda od tod izračunamo s Cramerjevim pravilom:

$$y' = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} -F_x & F_z \\ -G_x & G_z \end{vmatrix}, \qquad z' = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} F_y & -F_x \\ G_y & -G_x \end{vmatrix}.$$

3.5 Ekstremi in stacionarne točke

Iskanje ekstremov funkcij sodi med najbolj uporabna poglavja analize. Lokalne ekstreme — maksimume in minimume — funkcije več spremenljivk definiramo podobno kot ekstreme funkcije ene spremenljivke:

Definicija 3.5.1. *Zvezna funkcija dveh spremenljivk $f(x,y)$ zavzame v točki (a,b)* lokalni maksimum*, če obstaja tak δ, da je*

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) < 0 \tag{3.9}$$

za vsak (h,k), ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta$, in lokalni minimum*, če je*

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) > 0 \tag{3.10}$$

za vsak (h,k), ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta$,.

Bolj splošno: zvezna funkcija n spremenljivk $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *zavzame v točki* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ lokalni maksimum*, če obstaja tak* $\delta > 0$*, da je*

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) < 0$$

za vsak $\boldsymbol{h}$*, kjer je* $|\boldsymbol{h}|^2 = h_1^2 + \cdots h_n^2 < \delta^2$ *in* lokalni minimum*, če je*

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, \ldots, a_n) > 0$$

za vsak $\boldsymbol{h}$*, kjer je* $|\boldsymbol{h}|^2 = h_1^2 + \cdots h_n^2 < \delta^2$.

Če je funkcija $f(x, y)$ diferenciabilna in zavzame v točki (a, b) ekstrem, sta funkciji $f_1(x) = f(x, b)$ in $f_2(y) = f(a, y)$, ki ju dobimo tako, da predpišemo vrednost ene od obeh spremenljivk, obe odvedljivi funkciji ene spremenljivke, prva zavzame ekstrem v točki a, druga pa v točki b. Torej je

$$f_1'(a) = f_x(a, b) = 0 \quad \text{in} \quad f_2'(b) = f_y(a, b) = 0.$$

Tako smo dobili *potreben pogoj za nastop ekstrema* v točki (a, b):

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke definiramo:

Definicija 3.5.2. *Točka* (a, b)*, v kateri je*

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0,$$

je stacionarna točka *(ali* kritična točka*) funkcije* $f(x, y)$*.*

Točka $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *je* stacionarna točka *funkcije n spremenljivk* $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$*, če so vsi prvi parcialni odvodi v tej točki enaki* 0*:*

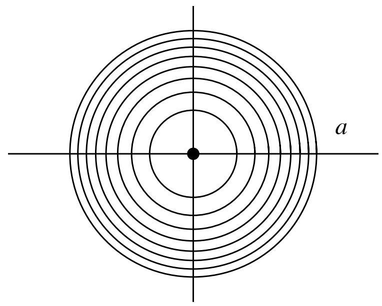
$$f_{x_1}(\boldsymbol{a}) = \cdots = f_{x_n}(\boldsymbol{a}) = 0.$$

Potreben pogoj za nastop ekstrema pove:

Izrek 3.5.1. *Če zavzame diferenciabilna funkcija* $f(x, y)$ *v točki* (a, b) *lokalni ekstrem, je* (a, b) *stacionarna točka.*

Podobno, če zavzame diferenciabilna funkcija $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *v točki* $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *ekstrem, je* $\boldsymbol{a}$ *stacionarna točka.*

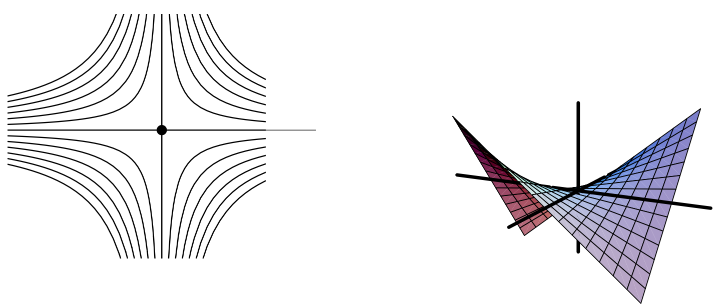
Primer 3.5.1.



Slika 3.11: Nivojske krivulje funkcije $z = x^2 + y^2$

1. Vzemimo funkcijo $f(x, y) = x^2 + y^2$. Iz enačb
$$f_x = 2x = 0 \quad \text{in} \quad f_y = 2y = 0$$
sledi, da je $(0, 0)$ edina stacionarna točka funkcije f. Ker je $f(x, y) > 0$ za vsak $(x, y) \neq (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ in $f(0, 0) = 0$, zavzame očitno funkcija v tej točki minimum. Nivojske krivulje so na sliki **??**.

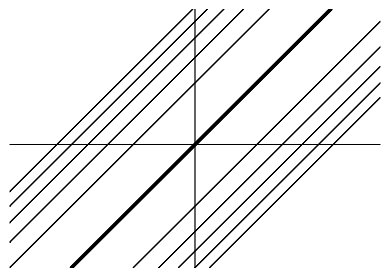
2. Tudi funkcija $f(x, y) = xy$ ima stacionarno točko $(0, 0)$, vendar je $f(x, y) \geq 0$ za $x \geq 0$, $y \geq 0$, in $f(x, y) \leq 0$ za $x \geq 0$, $y \leq 0$, torej v tej točki ni ekstrema. Nivojske krivulje in graf te funkcije so na sliki **??**. Tako stacionarno točko funkcije dveh spremenljivk imenujemo *sedlo*.



Slika 3.12: Nivojske krivulje in graf funkcije $z = xy$

3. Nazadnje, funkcija $f(x, y) = (y - x)^2$ ima tudi stacionarno točko $(0, 0)$, ki ni lokalni ekstrem, saj je $f(x, y) = f(0, 0) = 0$ v vsaki točki na

premici $y = x$. Nivojske krivulje so na sliki **??**. Tako stacionarno



Slika 3.13: Nivojske krivulje funkcije $z = (y - x)^2$

točko imenujemo *nepopolni ekstrem.* ■

Našteti primeri kažejo, da lahko iz vedenja funkcije v okolici stacionarne točke ugotovimo, če je v njej ekstrem ali ne. Če je funkcija dvakrat zvezno parcialno odvedljiva, pa si lahko, podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke, pri določanju ekstremov pomagamo z drugimi parcialnimi odvodi funkcije v stacionarni točki.

Izrek 3.5.2. (Zadosten pogoj za nastop ekstrema) *Točka (a, b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f(x, y)$, naj bodo*

$$A = f_{xx}(a, b), \quad B = f_{xy}(a, b) \quad \text{in} \quad C = f_{yy}(a, b)$$

vrednosti drugih parcialnih odvodov funkcije f v tej točki in

$$H(a, b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

matrika drugih parcialnih odvodov. Potem velja:

1. če je $\det H(a, b) = AC - B^2 > 0$, je v točki (a, b) lokalni minimum, kadar je $A > 0$, in lokalni maksimum, kadar je $A < 0$,

2. če je $\det H((a, b)) < 0$, je v točki (a, b) sedlo,

3. če je $\det H((a, b)) = AC - B^2 = 0$ pa na podlagi drugih parcialnih odvodov običajno o obstoju ekstrema ne moremo sklepati.

Dokaz. Zapišimo Taylorjevo formulo za $f(a+h, b+k)$. Ker je (a, b) stacionarna točka, so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0, torej ostane:

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \frac{1}{2}(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) + R_3.$$

Za dovolj majhna h in k, je člen R_3 zanemarljiv v primerjavi z ostalimi členi in je predznak razlike $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ odvisen od predznaka kvadratne forme

$$Q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

1. Če je $AC - B^2 > 0$, morata biti A in C različna od 0 in istega znaka. V tem primeru lahko pišemo

   $$Q(h, k) = \frac{(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2}{A},$$

   izraz v števcu je pozitiven, torej je $Q(h, k)$ za vsak $(h, k) \neq (0, 0)$ istega znaka kot A. V točki (a, b) je torej lokalni minimum, če je $A > 0$ in lokalni maksimum, če je $A < 0$.

2. Če je $AC - B^2 < 0$, moramo ločiti dve možnosti. Prva možnost je, da je $A \neq 0$ ali $C \neq 0$, druga pa, da je $A = C = 0$. Recimo, da je $A \neq 0$. Potem je predznak

   $$Q(h, k) = \frac{(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2}{A},$$

   odvisen od izbire h in k — če je $k = 0$, ima $Q(h, k)$ enak predznak kot A, če je $Ah = -Bk$, pa ima $Q(h, k)$ obraten predznak kot A. V tem primeru torej v točki (a, b) ni ekstrema. Podobno postopamo, če je $C \neq 0$. Če je $A = C = 0$, mora biti $B \neq 0$ in je predznak $Q(h, k) = 2Bhk$ spet odvisen od izbire h in k — če je $h = k$, je Q istega znaka kot B, če je $h = -k$ pa je Q nasprotnega znaka kot B.

3. Nazadnje, če je $AC - B^2 = 0$, pa pri kakšnih h in k na predznak razlike $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ vpliva tudi ostanek R_3 — če je $A \neq 0$ je to takrat, kadar je $Ah + Bk = 0$ (in podobno, če je $C \neq 0$), če je $A = 0$, pa mora biti tudi $B = 0$ in je $Q(h, k) = 0$.

□

Primer 3.5.2.

1. Poiščimo stacionarne točke funkcije

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - 3y$$

in med njimi lokalne minimume, maksimume in sedla.

Iz sistema

$$f_x = 2xy = 0, \quad f_y = x^2 + 3y^2 - 3 = 0$$

sledi, da ima funkcija štiri stacionarne točke:

$$T_1(0,1), \quad T_2(0,-1), \quad T_3(\sqrt{3},0), \quad T_4(-\sqrt{3},0).$$

Matrika drugih parcialnih odvodov je:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{bmatrix},$$

torej:

$$\det H(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

in $A = 2 > 0$, torej je v T_1 lokalni minimum.

$$\det H(0,-1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} > 0$$

in $A < 0$, torej je v T_2 lokalni maksimum.

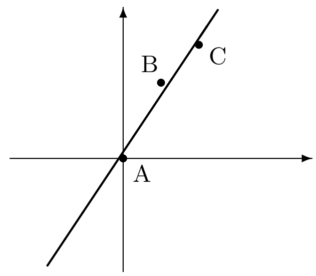
$$\det H(\sqrt{3},0) = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} < 0,$$

pa tudi $\det H(-\sqrt{3},0) < 0$, zato sta v točkah T_3 in T_4 sedli.

2. *Metoda najmanjših kvadratov* je pomemben in zelo koristen primer uporabe ekstremov funkcije dveh spremenljivk. Recimo, da je danih n točk $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$, ki smo jih dobili na podlagi meritev ali opazovanj. Poiskati želimo premico $y = \alpha x + \beta$, ki se najbolje prilega danim točkam, tako da je vsota kvadratov navpičnih odmikov najmanjša (glej sliko **??**).

   Naša naloga je določiti koeficiente α in β tako, da bo vrednost izraza

$$d(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\alpha x_i + \beta))^2$$



Slika 3.14: Premica, dobljena z metodo najmanjših kvadratov, ki se najbolje prilega točkam A, B in C.

minimalna. Poiskati moramo torej minimum funkcije $d(\alpha, \beta)$.

Nalogo bomo rešili na preprostem primeru treh točk: $A(0,0)$, $B(1,2)$ in $C(2,3)$. V tem primeru moramo poiskati ekstrem funkcije

$$d(\alpha, \beta) = (\beta)^2 + (2 - (\alpha + \beta))^2 + (3 - (2\alpha + \beta))^2.$$

Poiščimo najprej stacionarne točke:

$$d_\alpha(\alpha, \beta) = -2(2 - (\alpha + \beta)) - 4(3 - (2\alpha + \beta)) = 10\alpha + 6\beta - 16 = 0,$$

$$d_\beta(\alpha, \beta) = 2\beta - 2(2 - (\alpha + \beta)) - 2(3 - (2\alpha + \beta)) = 6\beta + 6\alpha - 10 = 0.$$

Rešitev tega sistema je $\alpha = 3/2,\ \beta = 1/6$. Iz geometrijske narave problema sledi, da minimum zagotovo obstaja. Ker smo dobili eno samo kritično točko, lahko torej brez računanja drugih odvodov zatrdimo, da je to minimum. Iskana premica je torej

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}.$$

■

Poglejmo še, kako poiščemo lokalne ekstreme med stacionarnimi točkami funkcije n spremenljivk $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Naj bo $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ stacionarna točka. Po Taylorjevi formuli je v tem primeru

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}Q(\boldsymbol{h}) + R_3 = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}^T H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}) + R_3.$$

Predznak razlike $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ je torej odvisen od predznaka kvadratne forme $Q(\boldsymbol{h})$. Iz linearne algebre vemo (glej razdelek **??**), da je $Q(\boldsymbol{h}) > 0$ za vsak $\boldsymbol{h}$, če je forma q pozitivno definitna, to je takrat, kadar so vse lastne vrednosti matrike $H(\boldsymbol{a})$ pozitivne, in $Q(\boldsymbol{h}) < 0$ za vsak $\boldsymbol{h}$, če je forma q negativno definitna, to je takrat, kadar so vse lastne vrednosti matrike $H(\boldsymbol{a})$ negativne. Če so lastne vrednosti vse različne od 0 in različno predznačene, je forma nedefinitna, njene vrednosti $Q(\boldsymbol{h})$ pa so pri različnih $\boldsymbol{h}$ različno predznačene. Nazadnje, če je kakšna lastna vrednost enaka 0, je forma degenerirana. V tem primeru na predznak razlike $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})$ vpliva tudi člen R_3.

Velja torej:

Izrek 3.5.3. *Naj bo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ stacionarna točka vsaj dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, naj bo $H(\boldsymbol{a})$ matrika drugih parcialnih odvodov in $Q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{T}} H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}$ prirejena kvadratna forma. Potem:*

1. f zavzame v točki $\boldsymbol{a}$ maksimum, če je q negativno definitna.

2. f zavzame v točki $\boldsymbol{a}$ minimum, če je q pozitivno definitna.

3. f v točki $\boldsymbol{a}$ nima lokalnega ekstrema, če je q nedefinitna.

4. Če je kvadratna forma q degenerirana, pa drugi parcialni odvodi ne dajo odgovora o eksistenci ekstrema.

Dokaz. V stacionarni točki $\boldsymbol{a}$ so vsi prvi parcialni odvodi enaki 0 in v Taylorjevi formuli ostane le

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{T}} H(\boldsymbol{y})\boldsymbol{h}),$$

kjer je $\boldsymbol{y}$ neka točka na daljici med $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{x}$. Naj bo kvadratna forma v stacionarni točki $\boldsymbol{a}$,

$$Q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{T}} H(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h},$$

nedegenerirana in, na primer, pozitivno definitna. Potem je pozitino definitna tudi forma v bližnjih točkah $\boldsymbol{y}$, torej je za vsak $\boldsymbol{x}$ v neki okolici točke $\boldsymbol{a}$:

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}^{\boldsymbol{T}} H(\boldsymbol{y})\boldsymbol{h}) > 0$$

in v točki $\boldsymbol{x}$ je lokalni minimum. Ostali dve možnosti pa obravnavamo prav tako.

$\square$

Primer 3.5.3. Poiščimo stacionarne točke in ekstreme funkcije

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x + y^2 + z^2.$$

Najprej stacionarne točke:

$$\operatorname{grad} f = (3x^2 - 3, 2y, 2z) = (0, 0, 0).$$

Kritični točki sta torej dve: $T_1(1, 0, 0)$ in $T_2(-1, 0, 0)$.

Matrika drugih parcialnih odvodov je:

$$H(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

V točki T_1 je kvadratna forma $Q(h_1, h_2, h_3) = 6h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$ pozitivno definitna, torej je v tej točki minimum.

V točki T_2 pa je kvadratna forma $Q(h_1, h_2, h_3) = -6h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$ indefinitna, torej ekstrema v tej točki ni. $\blacksquare$

Vezani ekstremi

Naj bo funkcija $f(x,y)$ definirana na območju $D \subseteq R^2$ in $g(x,y)=0$ implicitna enačba neke krivulje v D. Vezani ekstrem je ekstrem funkcije $f(x,y)$ na množici točk, ki zadoščajo pogoju $g(x,y)=0$. Drugače povedano, vezani ekstrem je ekstrem funkcije f nad dano krivuljo.

Primer 3.5.4. Poiščimo lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x+y$ nad krivuljo $xy=1$.

Očitno lahko iz enačbe krivulje izrazimo $y=\frac{1}{x}$, vstavimo v f in poiščemo ekstreme funkcije ene spremenljivke

$$h(x) = f\left(x, \frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}.$$

Izračunamo stacionarne točke te funkcije:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

torej $x=\pm 1$. Ker je $h''(1) = 2 > 0$, je v točki $T(1,1)$ lokalni minimum; ker je $h''(-1) = -2 < 0$, je v tej točki lokalni maksimum. ■

Splošneje, če je $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\dots,x_n)$ funkcija n spremenljivk, definirana na neki množici D, iščemo pri vezanem ekstremu največjo in najmanjšo vrednost, ki jo za vzame f na množici tistih točk $\boldsymbol{x} \in D$, ki zadoščajo $k<n$ pogojem

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \dots, \quad g_k(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Kot kaže zgornji primer, lahko pogosto iz pogojev eliminiramo določeno število spremenljivk (kadar so izpolnjeni pogoji izreka o implicitni funkciji, ki ga v tem splošnem okviru najdemo na primer v [**?**], v posebnih primerih $n=2$ ali $n=3$ pa v prejšnjem razdelku):

$$x_{n-k+1} = \varphi_1(x_1,\dots,x_{n-k}), \dots, x_n = \varphi_k(x_1,\dots,x_{n-k})$$

in iskanje vezanega ekstrema prevedemo na iskanje navadnega ekstrema funkcije

$$h(x_1,\dots,x_{n-k}) = f(x_1,\dots,x_{n-k},\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-k}),\dots,\varphi_k(x_1,\dots,x_{n-k}))$$

$n-k$ spremenljivk.

Vezane ekstreme pa lahko poiščemo tudi drugače. Iz funkcije f in vseh pogojev sestavimo novo funkcijo, ki jo imenujemo *Lagrangeova funkcija*:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$$
$$= f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \cdots - \lambda_k g_k(x_1, \dots, x_n).$$

Lagrangeova funkcija je odvisna od $(n+k)$ spremenljivk — poleg spremenljivk $x_1, \dots, x_n$ nastopa še k novih spremenljivk $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ki jim pravimo *Lagrangeovi multiplikatorji.*

Izrek 3.5.4. *Vezani ekstremi funkcije f pri pogojih $g_1 = 0, \dots, g_k = 0$ nastopijo med stacionarnimi točkami Lagrangeove funkcije L, torej med točkami, ki so rešitve sistema*

$$\begin{aligned}
L_{x_1} &= f_{x_1} - \lambda_1 g_{x_1} - \cdots \lambda_k g_{x_n} = 0 \\
&\vdots \\
L_{x_n} &= f_{x_n} - \lambda_1 g_{x_n} - \cdots \lambda_k g_{x_n} = 0 \\
L_{\lambda_1} &= -g_1 = 0 \\
&\vdots \\
L_{\lambda_k} &= -g_k = 0.
\end{aligned}$$

S pomočjo Lagrangeove funkcije poiščemo tiste točke, ki so kandidati za vezane ekstreme. Med njimi moramo izbrati tiste, v katerih ekstrem res nastopi, pri tem pa si najlaže pomagamo s takšnim ali drugačnim razmislekom in upoštevanjem vsega, kar o problemu vemo (zlasti pri uporabnih problemih).

Primer 3.5.5.

1. Poiščimo tisto točko na ravnini $ax + by + cz - d = 0$, ki je najbliže koordinatnemu izhodišču.

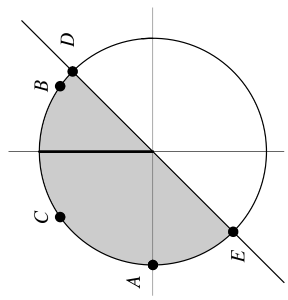
   Namesto, da bi iskali ekstrem oddaljenosti točke od izhodišča pri danem pogoju, si bomo nalogo malo poenostavili in iskali raje ekstrem kvadrata oddaljenosti točke od izhodišča:

   $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

   pri pogoju $ax + by + cz - d = 0$.

   Sestavimo Lagrangeovo funkcijo:

   $$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(ax + by + cz - d)$$



Slika 3.15: Območje

in poiščimo njene kritične točke:

$$L_x = 2x - a\lambda = 0, \quad L_y = 2y - b\lambda = 0, \quad L_z = 2z - c\lambda = 0,$$

$$-L_\lambda = ax + by + cz - d = 0.$$

Iz prvih treh enačb izrazimo $x = a\lambda/2$, $y = b\lambda/2$ in $z = c\lambda/2$ in vstavimo v četrto:

$$\frac{a^2\lambda}{2} + \frac{b^2\lambda}{2} + \frac{c^2\lambda}{2} = d,$$

torej $\lambda = 2d/(a^2 + b^2 + c^2)$ in:

$$x = \frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad y = \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{in} \quad z = \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Iz geometrijske narave problema sledi, da minumum zagotovo obstaja, torej je ta edina kritična točka iskana točka na ravnini.

2. Poiščimo ekstreme funkcije $f(x, y) = xy^2$ na polkrogu

$$x^2 + y^2 \leq 3, x \leq y,$$

ki je na sliki **??**.

Naloga je sestavljena iz dveh delov — funkcija $f(x, y)$ ima lahko ekstreme v notranjosti danega območja, ali pa na robu. Najprej moramo torej poiskati navadne ekstreme funkcije, potem pa še rešiti problem vezanega ekstrema, kjer je točka (x, y) na robu.

Poiščimo najprej kritične točke v notranjosti območja:

$$f_x = y^2 = 0, \quad f_y = 2xy = 0,$$

torej so vse točke $(x, 0)$ kritične točke. Vrednost funkcije v njih je $f(x, 0) = 0$.

Rob območja je sestavljen iz dveh delov — polkrožnice in daljice. Vezani ekstremi na polkrožnici bodo med kritičnimi točkami Lagrangeove funkcije

$$L(x, y, \lambda) = xy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 3) :$$

$$L_x = y^2 - 2\lambda x = 0, \quad L_y = 2xy - 2\lambda y = 0,$$

$$L_\lambda = -(x^2 + y^2 - 3) = 0.$$

Ta sistema ima šest rešitev, vendar so le tri znotraj predpisanega območja:

$$A(-\sqrt{3}, 0), \quad B(1, \sqrt{2}) \quad \text{in} \quad C(-1, \sqrt{2}).$$

Vezane ekstreme na premeru $y = x$, $-\sqrt{(3/2)} \leq x \leq \sqrt{(3/2)}$ najlaže dobimo tako, da v f vstavimo $y = x$. Tako dobljena funkcija $f(x, x) = x^3$ je monotono naraščajoča, torej ima najmanjšo vrednost pri $x = -\sqrt{(3/2)}$, največjo pa pri $x = \sqrt{(3/2)}$. Tako smo dobili še zadnja dva kandidata za največjo in najmanjšo vrednost funkcije:

$$D(\sqrt{(3/2)}, \sqrt{(3/2)}) \quad \text{in} \quad E(-\sqrt{(3/2)}, -\sqrt{(3/2)}).$$

Funkcijske vrednosti v dobljenih točkah so

$$f_A = 0, \quad f_B = 2 \quad f_C = -2, \quad f_D = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{in} \quad f_E = -\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Funkcija torej zavzame največjo vrednost 2 v točki $B(1, \sqrt{2})$, najmanjšo -2 pa v točki $C(-1, \sqrt{2})$. ∎