Matematika 1

Gabrijel Tomšič   Bojan Orel   Neža Mramor Kosta

21. april 2008

Poglavje 5

Integral

5.1 Nedoločeni in določeni integral

Nedoločeni integral

V poglavju o odvajanju funkcij smo se naučili dani funkciji f poiskati njen odvod f' oziroma diferencial $df = f'(x)\,dx$. Ugotovili smo, da je vsaka odvedljiva funkcija zvezna, zvezna funkcija pa ni nujno odvedljiva. Tu zastavimo obratno nalogo — k dani funkciji f iščemo tisto funkcijo F, katere odvod je f:

$$F'(x) = f(x).$$

Definicija 5.1.1. Funkcijo F, katere odvod je enak f, imenujemo *nedoločeni integral* funkcije f in pišemo

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Kadar nedoločeni integral funkcije f obstaja, to ni ena sama funkcija — če je F integral funkcije f in C poljubna konstanta, je tudi $F + C$ integral iste funkcije, saj imata funkciji F in $F+C$ isti odvod f. Iz izreka 4.6.5 sledi:

Izrek 5.1.1. *Če je F kak nedoločeni integral funkcije f, dobimo vsak drug njen integral tako, da funkciji F prištejemo konstanto.*

Primer 5.1.1. V primeru 4.1.1 smo ugotovili, da je $(\sin x)' = \cos x$, torej je

$$\int \cos x\,dx = \sin x.$$

■

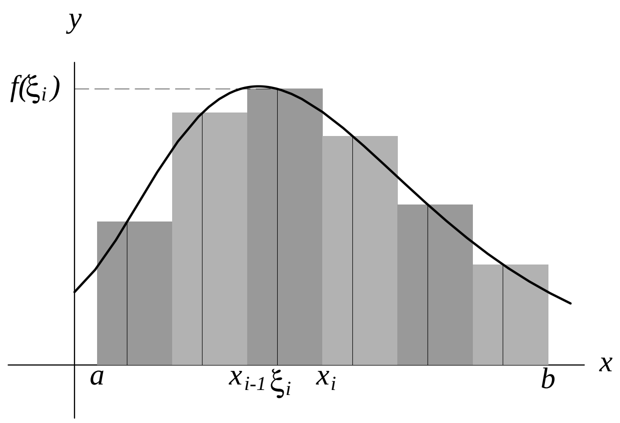
Na podoben način iz vsake formule v tabeli 4.1 dobimo pravilo za integral. Tako poznamo integrale vseh funkcij, ki nastopajo v desnem stolpcu te tabele.

Ob tem se zastavi zprašanje, kakšna mora biti funkcija f, da bo imela svoj nedoločni integral. Preden bomo lahko odgovorili na to vprašanje moramo vpeljati pojem *določenega integrala* funkcije na nekem intervalu (ki na prvi pogled z nedoločenim integralom nima nič skupnega). Izkazalo se bo, da sta oba na videz povsem različna pojma tesno povezana.

Določeni integral

Do pojma določenega integrala najnaravneje pripelje problem računanja ploščin krivočrtnih likov. Naj bo funkcija f na intervalu $[a, b]$ zvezna in povsod pozitivna: $f(x) > 0$. Radi bi izračunali ploščino S lika, ki ga omejujejo ta krivulja, krajni ordinati $x = a$ in $x = b$ ter odsek abscisne osi.

Problema se lotimo tako, da namesto ploščine krivočrtnega lika izračunamo ploščino stopničastega lika, ki se danemu krivočrtnemu liku čim bolje prilega.



Slika 5.1: Integralske vsote so približek za ploščino lika pod krivuljo

V ta namen izberemo *delitev* intervala $[a, b]$, to je množico $n + 1$ točk

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\},$$

za katere velja:

$$x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq b = x_n.$$

Te točke razdelijo interval na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$ z dolžinami $\delta_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Na vsakem podintervalu izberemo točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$. Produkt $f(\xi_k)\delta_k$ je enak ploščini pravokotnika, ki ima δ_k za osnovnico in višino $f(\xi_k)$. Vsoti vseh teh ploščin

$$\sigma_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \cdots + f(\xi_n)\delta_n, \tag{5.1}$$

pravimo *integralska vsota* funkcije f in je približek za iskano ploščino, ki je tem boljši, čim manjše so dolžine podintervalov δ_k.

Omejitev $f(x) > 0$ pravzaprav ni potrebna. Integralske vsote lahko definiramo tudi za funkcije, ki so kje na intervalu negativne. Zveza s ploščino je podobna, če ploščine likov pod osjo x obravnavamo kot negativne količine.

Naj bo funkcija f na intervalu $[a, b]$ omejena in naj bo

$$m = \inf_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{in} \quad M = \sup_{a \le x \le b} f(x).$$

Če je $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ delitev intervala, je tudi na vsakem podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ funkcija f omejena, za vsak k obstajajo

$$m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \quad \text{in} \quad M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x).$$

Vsotam

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k \quad \text{in} \quad S_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k$$

pravimo *spodnje* in *zgornje integralske vsote*. Za vsako delitev D in za vsako integralsko vsoto σ_D velja:

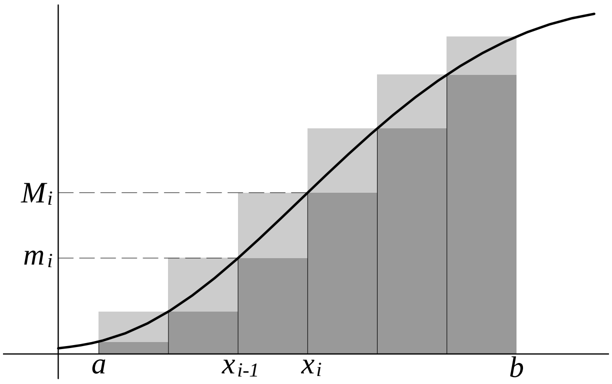
$$m(b-a) \le s_D \le \sigma_D \le S_D \le M(b-a). \tag{5.2}$$

Za spodnje in zgornje integralske vsote velja:

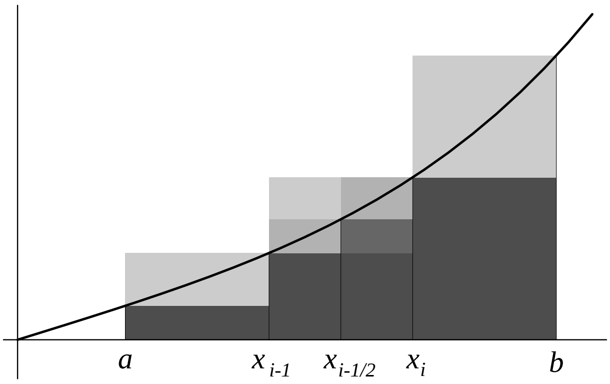
1. Če delitvi intervala D dodamo dodatne delilne točke, dobimo novo delitev $D' \supset D$ ter je

$$s_{D'} \ge s_D \quad \text{in} \quad S_{D'} \le S_D. \tag{5.3}$$

Ta lastnost spodnjih in zgornjih vsot se lepo vidi na sliki 5.3, natančen dokaz bi zahteval precej besed in ga izpustimo.



Slika 5.2: Spodnja in zgornja integralska vsota.



Slika 5.3: Spodnje in zgornje vsote.

2. Če sta D in D' poljubni delitvi, je $s_D \leq S_{D'}$. Drugače povedano: vsaka spodnja vsota je manjša od katerekoli zgornje vsote.

   To lastnost dokažemo tako, da obe delitvi sestavimo v novo delitev $D'' = D \cup D'$, ki vsebuje vse delilne točke delitev D in D'. Zaradi (5.3) je $s_D \leq s_{D''}$ in $S_{D'} \geq S_{D''}$, torej velja:

$$s_D \leq s_{D''} \leq S_{D''} \leq S_{D'}.$$

Vse spodnje vsote so omejene navzgor, saj je $s_D \leq M(b-a)$ za vsako delitev D. Vse zgornje vsote pa so omejene navzdol, saj za vsako delitev D velja $S_D \geq m(b-a)$. Zato obstaja

$$I_1 = \sup s_D \quad \text{in} \quad I_2 = \inf S_D.$$

Definicija 5.1.2. Funkcija f je *integrabilna* na intervalu $[a,b]$, če je $I_1 = I_2$. Število $I = I_1 = I_2$ imenujemo *določeni integral* funkcije f na intervalu $[a,b]$ in pišemo:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Drugače povedano,

Izrek 5.1.2. *Funkcija f je integrabilna na intervalu $[a,b]$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev D intervala, da je*

$$S_D - s_D < \varepsilon.$$

Če je funkcija integrabilna na intervalu $[a,b]$, očitno velja

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{5.4}$$

Pri uporabi določenega integrala se pogosto sklicujemo na posledico ocene (5.2): če je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$ in je (D_m) poljubno zaporedje delitev, ki ima to lastnost, da gredo vse dolžine δ_k proti 0, ko $m \to \infty$, ter je (σ_m) pripadajče zaporedje integralskih vsot, potem je

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \int_a^b f(x)\,dx.$$

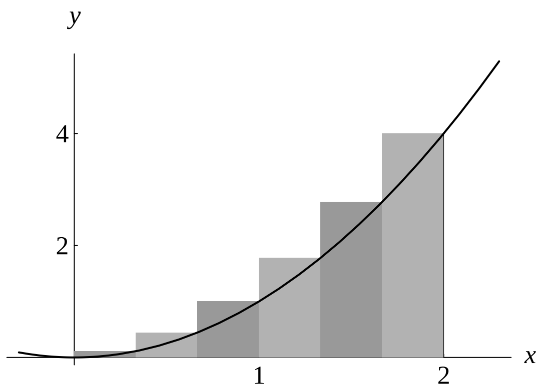
Primer 5.1.2. Izračunajmo ploščino lika, ki ga določa krivulja $y = x^2$ nad intervalom $[0,2]$.

Interval razdelimo na n enakih delov dolžine $\delta = 2/n$, delilne točke so $x_k = 2k/n$. Na vsakem podintervalu izberemo za ξ_k kar desno krajišče intervala, torej točko $x_k = 2k/n$. Integralska vsota, ki jo tako dobimo je enaka

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n x_k^2\delta = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2.$$

Uporabimo dobro znano formulo (ki jo lahko dokažemo z matematično indukcijo):

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Slika 5.4: Ploščina lika pod krivuljo $y = x^2$.

in dobimo:

$$\sigma_n = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

Ko $n \to \infty$, je ploščina σ_n čedalje bliže iskani ploščini in v limiti dobimo:

$$S = \lim \sigma_n = \frac{8}{3}.$$

■

Izrek 5.1.2 lahko uporabimo kot kriterij za ugotavljanje integrabilnosti funkcij. Z njegovo pomočjo lahko pokažemo integrabilnost treh razredov funkcij.

Izrek 5.1.3. *Funkcija, ki je zvezna na intervalu $[a, b]$, je na tem intervalu tudi integrabilna.*

Dokaz. Ker je funkcija zvezna na zaprtem intervalu, lahko po izreku 3.2.13 za vsak $\varepsilon > 0$ dobimo tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$, če sta x in y poljubni točki na intervalu, za kateri velja $|x - y| < \delta$.

Vzemimo tako delitev intervala $[a, b]$, da bodo dolžine vseh podintervalov $\delta_k < \delta$ in naj bo m_k natančna spodnja in M_k natančna zgornja meja funkcije f na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$. Potem je $M_k - m_k < \varepsilon$ za vsak k, zato je

$$S - s = \sum_k (M_k - m_k)\delta_k < \sum_k \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

□

Pravimo, da je funkcija $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ *odsekoma zvezna*, če ima končno mnogo točk nezveznosti in v vsaki od njih končno levo in desno limito.

Izrek 5.1.4. *Če je funkcija f na intervalu $[a,b]$ odsekoma zvezna, je integrabilna.*

Dokaza izreka 5.1.4 ne navajamo. Razlog, da izrek velja, je v osnovi tale: če je f odsekoma zvezna funkcija na $[a,b]$ in so $x_1,\ldots,x_k$ točke nezveznosti, lahko f na vsakem intervalu $[x_i,x_{i+1}]$ posebej dopolnimo do zvezne funkcije, tako da njene vrednosti v krajiščih nadomestimo z levo in desno limito. Vse dobljene funkcije na posameznih intervalih so potem integrabilne, vsota njihovih integralov je enaka integralu funkcije f po celem intervalu.

Izrek 5.1.5. *Vsaka monotona funkcija je integrabilna.*

Dokaz. Naj bo funkcija f naraščajoča in naj bodo x_k, $k=0,1,\ldots,n$ delilne točke na intervalu $[a,b]$. Ker je f naraščajoča, je $m_k=f(x_{k-1})$ in $M_k=f(x_k)$. Zgornja integralska vsota je enaka $S=\sum_k f(x_k)\delta_k$, spodnja integralska vsota pa $s=\sum_k f(x_{k-1})\delta_k$. Njuna razlika je

$$S-s=\sum_k [f(x_k)-f(x_{k-1})]\delta_k.$$

Naj bodo delilne točke dovolj goste, da so vse dolžine podintervalov $\delta_k<\delta$. Razliko $S-s$ lahko ocenimo

$$S-s\le\sum_k [f(x_k)-f(x_{k-1})]\delta=\delta\sum_k [f(x_k)-f(x_{k-1})]=\delta[f(b)-f(a)].$$

Ta razlika postane pri dovolj gostih delitvah poljubno majhna, zato je vsaka naraščajoča funkcija integrabilna. □

5.2 Lastnosti določenega integrala

Zaenkrat smo definirali določeni integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

v primeru, ko je $[a,b]$ interval, torej ko je $a\le b$. Definicijo dopolnimo: če je $b\le a$, je

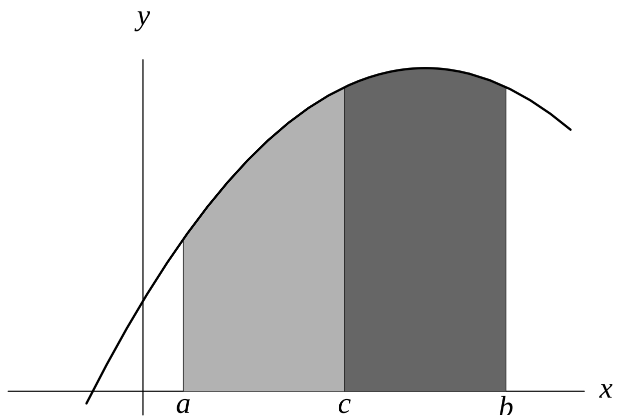
$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx. \tag{5.5}$$

1. Iz definicije določenega integrala vidimo, da smemo integracijsko spremenljivko poljubno imenovati, tako da je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Iz relacije (5.5) sledi, da je določeni integral, v katerem je spodnja meja enaka zgornji, enak 0:

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x) = 0. \tag{5.6}$$



Slika 5.5: Integral na intervalu $[a, b]$ je vsota integralov po podintervalih

3. Naj bo $a \leq c \leq b$. Funkcija f je na intervalu $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna na obeh podintervalih $[a, c]$ in $[c, b]$. Pri tem velja relacija

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{5.7}$$

Geometrijska vsebina te lastnosti je očitena: če lik pod krivuljo $y = f(x)$ nad intervalom $[a, b]$ razrežemo pri $x = c$, dobimo dva lika, katerih skupna ploščina je enaka ploščini prvotnega lika (slika 5.5).

Dokaz. Ker je f integrabilna na $[a, b]$, obstaja taka delitev D intervala, da je $S_D - s_D < \varepsilon$, kjer je $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Če delitvi D dodamo delilno točko c, dobimo novo delitev D' in velja $S_{D'} - s_{D'} < \varepsilon$. Vsoti $S_{D'}$ in $s_{D'}$ razpadeta na dva člena:

$$s_{D'} = s' + s'', \quad S_{D'} = S' + S'',$$

kjer se vsoti s' in S' nanašata na interval $[a, c]$, vsoti s'' in S'' pa na interval $[c, b]$. Ker je

$$S_{D'} - s_{D'} = (S' - s') + (S'' - s'') < \varepsilon,$$

kjer sta oba člena pozitivna, mora veljati tudi

$$S' - s' < \varepsilon \quad \text{in} \quad S'' - s'' < \varepsilon,$$

torej je f integrabilna na intervalih $[a, c]$ in $[c, b]$. Za vsoto integralov velja:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \sup s' + \sup s'' = \sup_{c \in D'} s_{D'} \leq \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \inf S' + \inf S'' = \inf_{c \in D'} S_{D'} \geq \int_a^b f(x)\,dx,$$

tako mora biti

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

4. *Povprečna vrednost* integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je število

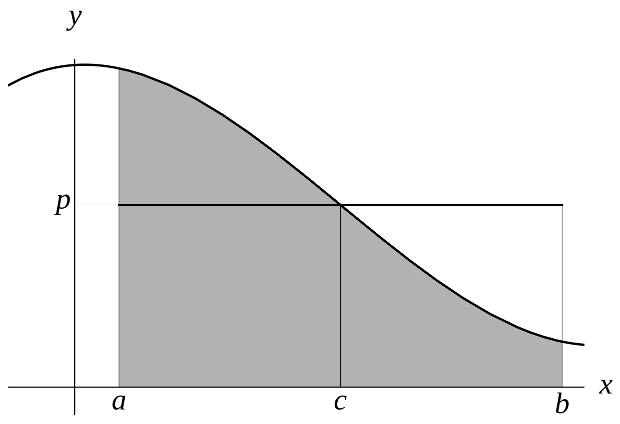
$$P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Iz ocene (5.4) sledi, da je P med natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M funkcije, torej

$$m \leq P \leq M.$$

Povprečno vrednost funkcije si lahko predstavljamo kot višino tistega pravokotnika nad intervalom $[a, b]$, ki ima enako ploščino kot lik, ki ga nad intervalom $[a, b]$ določa krivulja $y = f(x)$ (slika 5.6).

Če je funkcija f zvezna na $[a, b]$, po izreku 3.2.17 o vmesnih vrednostih, zavzame vse vrednosti med m in M, torej velja:



Slika 5.6: Izrek o povprečni vrednosti

Izrek 5.2.1. Izrek o povprečni vrednosti. *Če je f zvezna na intervalu $[a, b]$, obstaja vsaj ena točka $c \in [a, b]$, kjer je*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = P.$$

5. Če sta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[a, b]$ in če za vsak $x \in [a, b]$ velja $f(x) \leq g(x)$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dokaz. Pri vsaki delitvi D intervala je spodnja vsota $(s_D)_f$ funkcije f manjša od spodnje vsote $(s_D)_g$ funkcije g. Tako je tudi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup(s_D)_f \leq \sup(s_D)_g = \int_a^b g(x)\,dx.$$

6. Če je $f(x)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, je tudi $|f(x)|$ integrabilna na $[a, b]$ in velja:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dokaz. Če upoštevamo, da za vsak x velja

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

sledi neposredno iz prejšnje lastnosti, da je

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

to pa je res natanko takrat, kadar je

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

5.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Računanje določenega integrala s pomočjo integralskih vsot je lahko zamudno in nepraktično. V tem razdelku bomo spoznali še eno uporabno pot do določenega integrala. Hkrati bomo odgovorili na vprašanje o obstoju nedoločenega integrala.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Za vsak $x \in [a, b]$ je f zvezna na intervalu $[a, x]$, zato obstaja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{5.8}$$

Tako smo dobili novo funkcijo, ki je defnirana na intervalu $[a, b]$.

Izrek 5.3.1. *Funkcija $F(x)$, definirana s predpisom* (5.8) *je zvezna na* $[a, b]$. *Drugače povedano: Določeni integral je zvezna funkcija zgornje meje.*

Dokaz. Če spremenimo vrednost neodvisne spremenljivke x za h, se vrednost odvisne spremenljivke $y = F(x)$ spremeni za

$$\Delta F = F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Po izreku 5.2.1 o povprečni vrednosti obstaja tako število $\xi = x + \theta h$ med x in $x + h$ (t.j. $0 < \theta < 1$), da je

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = hf(x + \theta h). \tag{5.9}$$

Ker je f zvezna funkcija, je na $[a, b]$ tudi omejena, zato je razlika

$$\lim_{h\to 0} \Delta F(x) = \lim_{h\to 0} hf(x + \theta h) = 0.$$

□

Naslednji izrek opisuje zvezo med določenim in nedoločnim integralom neke funkcije in je osrednjega pomena. Po eni strani daje odgovor na vprašanje o obstoju nedoločenega integrala zvezne funkcije f, po drugi strani pa omogoča izpeljavo uporabne formule za računanje določenih integralov.

Izrek 5.3.2. Osnovni izrek integralskega računa *Funkcija $F(x)$, definirana z enačbo* (5.8)*, je odvedljiva na intervalu $[a, b]$, njen odvod je*

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x).$$

Drugače povedano: določeni integral $F(x)$ kot funkcija zgornje meje je nedoločeni integral *funkcije $f(x)$.*

Dokaz. Enačbo (5.9) lahko zapišemo kot

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x + \theta h).$$

Ko $h \to 0$, konvergira $f(x + \theta h) \to f(x)$, zato je

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = f(x).$$

□

Od tod neposredno sledi:

Izrek 5.3.3. *Vsaka zvezna funkcija ima nedoločeni integral.*

Naj bo $G(x)$ poljuben nedoločeni integral funkcije $f(x)$. Ker se dva nedoločena integrala funkcije f razlikujeta le za aditivno konstanto, je

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

Če v to zvezo vstavimo $x = a$, dobimo vrednost konstante C:

$$G(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C,$$

zato je

$$\int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a).$$

Če vstavimo $x = b$, dobimo dobro znano in zelo uporabno Newton[1]-Leibnizovo formulo za računanje določenih integralov:

Izrek 5.3.4. Newton-Leibnizova formula *Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$ in F njen poljuben nedoločeni integral, je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Pri računanju določenih integralov večkrat uporabljamo simboličen zapis

$$[F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

.

Ko uporabljamo Newton-Leibnizovo formulo ne smemo pozabiti na predpostavke, pri katerih velja. Pokažimo na primeru, kakšnim napakam se moramo izogibati pri njeni uporabi.

Primer 5.3.1. Vsak nedoločeni integral F je po definiciji odvedljiva, torej zvezna funkcija. Funkcija F v Newton-Leibnizovi formuli je lahko sicer katerikoli nedoločeni integral funkcije f, vendar pa mora biti zvezna na celem intervalu. Vzemimo na primer funkcijo

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2}.$$

Če izračunamo odvod

$$F'(x) = \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = \frac{1}{1 + x^2},$$

[1]Sir Isaac Newton (1642–1727), angleški matematik, fizik in astronom, skupaj z G. W. Leibnizom začetnik diferencialnega in integralnega računa.

se lahko zazdi, da je F nedoločeni integral funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

in jo uporabimo pri računanju integrala

$$\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = F(\sqrt{3}) - F(0)$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 0.$$

Ker je $\operatorname{arc\,tg} 0 = 0$ in $\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$, dobimo rezultat

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = -\pi/3.$$

To ni pravilen rezultat, kajti funkcija pod integralom je na integracijskem intervalu povsod pozitivna in mora biti tudi njen integral pozitiven.

Napaka je seveda v tem, da $F(x)$ ni nedoločeni integral funkcije $f(x)$, ker F ni zvezna na intervalu $[0, \sqrt{3}]$ — v točki 1 s tega intervala funkcija F sploh ni definirana, kaj šele da bi bila tam zvezna in odvedljiva.

Za nedoločeni integral funkcije $f(x) = 1/(1+x^2)$ lahko vzamemo funkcijo $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, ki je zvezna funkcija, ki je zvezna funkcija na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Pravilen račun je torej

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{arc\,tg} 0 = \pi/3.$$

■

5.4 Pravila za integriranje

Računanje nedoločenega integrala neke funkcije je odvajanju inverzna operacija, zato dobimo tabelo 5.1 elementarnih integralov iz tabele odvodov elementarnih funkcij (tabela 4.1).

Prav tako so pravila za integriranje preproste posledice ustreznih pravil za odvajanje. Zaradi tesne zveze med določenim in nedoločenim integralom je v večini primerov dovolj, če navedemo ustrezno pravilo za računanje nedoločnih integralov.

funkcija	integral	opomba
$\int x^r\,dx$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$	$r \neq -1$
$\int \frac{dx}{x}$	$\log\lvert x\rvert + C$	
$\int a^x\,dx$	$\dfrac{a^x}{\log a}+C$	$a>0;\ a\neq 1$
$\int e^x\,dx$	$e^x + C$	
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$	
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$	
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + C$	
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arc\,tg} x + C$	
$\int \operatorname{ch} x\,dx$	$\operatorname{sh} x + C$	
$\int \operatorname{sh} x\,dx$	$\operatorname{ch} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$	$\operatorname{th} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx$	$-\operatorname{cth} x + C$	
$\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx$	$\log(x+\sqrt{x^2+a})+C$	

Tabela 5.1: Tabela elementarnih integralov

1. Če sta f in g integrabilni funkciji, sta integrabilni tudi njuna vsota in razlika in velja

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx, \tag{5.10}$$

$$\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx. \tag{5.11}$$

Dokaz. Naj bo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(x) = \int g(x)\,dx$. Ker je $F'(x) = f(x)$ in $G'(x) = g(x)$, je

$$[F'(x) + G'(x)] = [F(x) + G(x)]' = f(x) + g(x),$$

zato je $F + G$ nedoločeni integral funkcije $f + g$, podobno velja tudi za razliko. To pravilo lahko razširimo na vsoto poljubnega končnega števila funkcij. Vsoto funkcij torej lahko členoma integriramo. □

Primer 5.4.1.

$$\int (x^2 - x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

■

2. Če je f integrabilna funkcija in k konstanta, je funkcija kf tudi integrabilna in velja

$$\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx. \tag{5.12}$$

Konstantni faktor smemo izpostaviti pred znak integrala.

Dokaz. Če je $F(x) = \int f(x)\,dx$, potem je

$$[kF(x)]' = kF'(x) = kf(x),$$

torej je $kF(x)$ nedoločeni integral funkcije $kf(x)$. □

Primer 5.4.2. Izračunajmo integral

$$\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = x^3 + C.$$

Splošno je integral polinoma

$$\int (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\,dx = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x + C$$

spet polinom, njegova stopnja se pri integriranju zviša za 1. ■

3. **Vpeljava nove spremenljivke.** Če je $x = x(t)$ odvedljiva funkcija, je

$$\int f(x)\,dx = \int f[x(t)]x'(t)\,dt. \tag{5.13}$$

Dokaz. Odvod nedoločenega integrala $F(x) = \int f(x)\,dx$ je $f(x)$. Po pravilu za posredno odvajanje je

$$\frac{dF(x(t))}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = f(x)x'(t),$$

zato je

$$F(x(t)) = \int f[x(t)]x'(t)\,dt.$$

□

Kadar pri računanju integralov uporabimo formulo (5.13) pravimo, da smo vpeljali novo spremenljivko. S pametno uvedbo nove spremenljivke si lahko olajšamo integracijo.

Primer 5.4.3.

(1) Integrale oblike

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx, \tag{5.14}$$

kjer je f poljubna odvedljiva funkcija, lahko izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke $u = f(x)$. Njen diferencial je $du = f'(x)\,dx$ in imamo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log|f(x)| + C.$$

Na primer:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\log|\cos x| + C.$$

(2) Recimo, da je

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Izračunajmo integral *premika* $f(x+a)$ in *raztega* $f(ax)$ funkcije $f(x)$. Naj bo $u = x + a$. Potem je $du = u'(x)dx = dx$, torej je

$$\begin{aligned} \int f(x+a)\, dx &= \int f(u(x))\, dx \\ = \int f(u)\, du &= F(u) + C = F(x+a) + C. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Naj bo $u = ax$. Potem je $du = a\, dx$ in

$$\int f(ax)\, dx = \int f(u(x))\, dx$$

$$= \int f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax) + C.$$

Nekaj konkretnih primerov:

- ker je
$$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C,$$
sledi iz pravila (5.15) za integral premika
$$\int \sqrt{x+a}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+a)^3} + C;$$

- ker je
$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C, \quad \text{je}$$
$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg}(ax) + C;$$

- izračunajmo integral

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.\end{aligned}$$

■

Pri vpeljevanju nove spremenljivke v določeni integral moramo paziti na meje. Pravilo se v tem primeru glasi takole:

Vpeljava nove spremenljivke v določeni integral. Naj bo f zvezna funkcija. Če je funkcija $x = x(t)$ monotona, zvezno odvedljiva na intervalu $[\alpha, \beta]$ in je $x(\alpha) = a$ in $x(\beta) = b$, velja formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x'(t)\,dt. \tag{5.16}$$

Primer 5.4.4. Integrale, v katerih nastopajo koreni kvadratnih izrazov, lahko pogosto poiščemo s pomočjo ustrezne *trigonometrične* ali *hiperbolične substitucije.*

(1) V integral

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

vpeljimo novo spremenljivko s predpisom $x = a\sin t$. Potem je $dx = a\cos t\,dt$, pri $t = 0$ je $x = 0$, pri $t = \pi/2$ je $x = a$ in funkcija $x(t) = a\sin t$ je monotona, zvezno odvedljiva na intervalu $[0, \pi/2]$, zato je

$$I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cdot \cos t\,dt.$$

Ker je $\cos t \geq 0$ za vsak $t \in [0, \pi/2]$, je

$$\sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t,$$

torej je

$$I = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{a^2}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

(2) S substitucijo $x = \operatorname{sh} t$, zato $dx = \operatorname{ch} t\, dt$ izračunajmo integral

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Dobimo

$$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C = \frac{-\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t} + C = \frac{-\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

■

4. **Integracija po delih (Integratio per partes)**

   Metodo dobimo iz formule za odvod produkta dveh funkcij. Naj bosta u in v odvedljivi funkciji. Zanju velja

$$(uv)' = u'v + uv',$$

   zato je po definiciji določenega integrala

$$uv = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx.$$

   Od tod dobimo

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$$

   ali krajše

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du. \tag{5.17}$$

Primer 5.4.5. Integracija po delih:

1. Tipičen integral, ki ga računamo z integracijo po delih, je

$$I = \int (x-1)\sin x\, dx.$$

   Vzemimo

$$\begin{aligned} x - 1 = u, &\quad \sin x dx = dv, \\ dx = du, &\quad -\cos x = v, \end{aligned}$$

   in je

$$I = -(x-1)\cos x + \int \cos x\, dx = -(x-1)\cos x + \sin x + C.$$

2. Izračunajmo še
$$I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$
Naj bo
$$\begin{array}{rl} x = u, & \dfrac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = dv, \\ dx = du, & \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2(1+x^2)} = v, \end{array}$$
in
$$\begin{aligned} I &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2} + C. \end{aligned}$$
■

5.5 Integrali elementarnih funkcij

Računanje integralov je dosti bolj zapleten problem kot računanje odvodov. Za vsako funkcijo, ki je sestavljena iz elementarnih funkcij vedno obstaja točno določen postopek, s katerim izračunamo njen odvod, ta se spet izraža z elementarnimi funkcijami. Za integrale to še zdaleč ne velja, saj na primer ni pravila, ki bi natančno povedalo, kako izračunati integral produkta ali kvocienta dveh funkcij. Še več — integral funkcije, ki se izraža kot produkt, kvocient, potenca ali kompozitum elementarnih funkcij, se pogosto ne izraža več z elementarnimi funkcijami. Tako sta, na primer integrala
$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{in} \quad \int e^{x^2}\,dx,$$
povsem novi funkciji, ki ju ne moremo izraziti z vsoto, produktom, potenco ali kompozitumom elementarnih funkcij. Za nekatere razrede funkcij pa vseeno obstaja algoritem za računanje nedoločenih integralov. Veliko teh algoritmov je uporabljenih v različnih računalniških programih za simbolično računanje, s pomočjo katerih lahko zelo uspešno računamo nedoločene integrale. Za

boljše razumevanje delovanja teh programov in tudi samega pojma integrala bomo v tem razdelku bomo opisali nekaj takih algoritmov.

Določene integrale lahko zelo uspešno računamo tudi s pomočjo različnih numeričnih metod, ki jih tu ne bomo obravnavali.

Integrali racionalnih funkcij

Primer 5.5.1. Začnimo z nekaj značilnimi zgledi integralov racionalnih funkcij:

1. Integral
$$I = \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx$$
brez težav izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke $t = x - 1$. Tako je $x = t + 1$ in $dx = dt$:
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^2+2t+2}{t^3}\,dt \\ &= \int (t^{-1} + 2t^{-2} + 2t^{-3})\,dt \\ &= \log t - \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + C. \end{aligned}$$
Na podoben način izračunamo vse integrale oblike
$$I = \int \frac{P_m(x)}{(x-a)^n}\,dx. \tag{5.18}$$
Z novo spremenljivko $t = x - a$, $dt = dx$ integral prevedemo na
$$I = \int \frac{P_m(a+t)}{t^n}\,dt = \int \frac{S_m(t)}{t^n}\,dt,$$
kjer je $S_m(t)$ polinom.

2. Funkcija v integralu
$$I = \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx$$

ima v imenovalcu nerazcepno kvadratno funkcijo (njena diskriminanta D je enaka -4). Zapišemo jo kot vsoto dveh členov, kjer ima prvi člen v števcu odvod imenovalca:

$$\frac{2x+4}{x^2+2x+2} = \frac{A(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{B}{x^2+2x+2}.$$

Konstanti A in B določimo iz enačbe

$$2x+4 = A(2x+2) + B$$

tako, da izenačimo koeficiente pri potencah spremenljivke x:

$$2A = 2 \quad \text{in} \quad 2A + B = 4,$$

od koder dobimo $A = 1$, $B = 2$ in

$$I = \int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Prvi integral je oblike (5.14) in ga že poznamo, drugega prevedemo na elementaren integral tako, da imenovalec zapišemo kot vsoto popolnega kvadrata in konstante:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

in dobimo

$$I = \log(x^2+2x+2) + 2\operatorname{arc\,tg}(x) + C.$$

Podoben postopek lahko uporabimo za računanje poljubnega integrala oblike

$$I = \int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx, \tag{5.19}$$

kjer je imenovalec nerazcepna kvadratna funkcija. Integral take oblike se vedno izraža kot vsota

$$I = A\log(x^2+px+q) + B\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{-D}} + C,$$

kjer je $D = p^2 - 4q$ diskriminanta kvadratne funkcije x^2+px+q, števec $2x+p = (x^2+px+q)'$ pa njen odvod.

3. Funkcijo v integralu

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$

zapišemo kot vsoto *parcialnih ulomkov*:

$$\frac{x^2+2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Koeficiente A, B in C določimo iz enačbe

$$x^2+2 = A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1),$$

ki mora veljati pri vsakem x. Če vanjo vstavimo $x=0$, dobimo $A=-1$. Pri $x=1$ dobimo $B=1$, pri $x=-1$ pa $C=1$. Od tod sledi:

$$\int \frac{x^2+2}{x^3+x^2-2x}dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\log|x| + \log|x-1| + \log|x+2| + C = \log\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right| + C.$$

■

Podoben postopek kot v zadnjem primeru lahko uporabimo pri računanju integrala poljubne racionalne funkcije

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{p_m x^m + \cdots + p_0}{q_n x^n + \cdots + q_0}, \tag{5.20}$$

kjer je polinom P_m stopnje m in polinom Q_n stopnje n. Če je $m>n$, polinoma delimo in dobimo

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = A_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)},$$

kjer je A_{m-n} polinom stopnje $m-n$, $R_k(x)$ pa je ostanek pri deljenju, ki ima stopnjo $k<n$.

Racionalno funkcijo

$$\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \quad k<n$$

lahko zapišemo kot vsoto parcialnih ulomkov, ki imajo v imenovalcu nerazcepne faktorje polinoma Q_n in integriramo vsak člen posebej. Integral tako razpade na integrale posameznih členov, med njimi pa so lahko le funkcije naslednjih oblik:

1. $\dfrac{u_j(x)}{(x-a)^i}$, $j < i$,

2. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, z diskriminanto $D = p^2 - 4q < 0$ in

3. $\dfrac{v_j(x)}{(x^2+px+q)^i}$, $j < 2i$.

Integrala prve in druge funkcije smo že izračunali, s tretjim integralom je več dela. Izračunamo ga tako, da z ustreznimi substitucijami in z integracijo per partes (tako kot v primeru 5.4.5) znižamo stopnjo i in ga prevedemo na integral druge vrste. Če posamezne integrale seštejemo, dobimo splošno obliko integrala racionalne funkcije:

$$\begin{aligned}\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx \\ = \frac{S_{l-1}(x)}{T_l(x)} & + \sum_j A_j \log|x-a_i| + \sum_j B_j \log(x^2+p_jx+q_j) \\ & + \sum_j C_j \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+p_j}{\sqrt{-D_j}} + D,\end{aligned}$$

kjer v imenovalcu $T_l(x)$ nastopajo vsi nerazcepni faktorji funkcije $Q_n(x)$ s potenco, ki je za 1 manjša od prvotne, $(x-a_i)$ so vsi linearni nerazcepni faktorji polinoma Q_n (a_i so vse realne ničle polinoma Q_n), $x^2+p_jx+q_j$ pa so vsi nerazcepni kvadratni faktorji v razcepu polinoma Q_n (D_j so njihove diskriminante).

Primer 5.5.2. Integral

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 + x + 1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$$

je vsota

$$I = \frac{Ax^2+Bx+C}{x(x^2+1)} + D\log|x| + E\log(x^2+1) + F\operatorname{arc\,tg} x + G. \tag{5.21}$$

Neznane koeficiente A, B, C, D, E in F določimo tako, da enačbo (5.21) odvajamo

$$\frac{x^5-x^4+x+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{(x^3+x)(2Ax+B) - (Ax^2+Bx+C)(3x^2+1)}{x^2(x^2+1)^2}$$

$$+\frac{D}{x} + \frac{2Ex}{x^2+1} + \frac{F}{x^2+1},$$

pomnožimo s skupnim imenovalcem

$$\begin{aligned}x^5 - x^4 + x + 1 \quad = \quad & 2Ax^4 + 2Ax^2 + Bx^3 + Bx - 3Ax^4 \\ & -3Bx^3 - 3Cx^2 - Ax^2 - Bx - C \\ & +D(x^5+2x^3+x) + 2Ex^3(x^2+1) + Fx^2(x^2+1)\end{aligned}$$

in primerjamo koeficiente pri vsaki od potenc spremenljivke x. Tako dobimo sistem linearnih enačb

$$
\begin{array}{rrrrrrcr}
 & & & +D & +2E & & = & 1 \\
-A & & & & & +F & = & -1 \\
 & -2B & & +2D & +2E & & = & 0 \\
A & & -3C & & & +F & = & 0 \\
 & & & D & & & = & 1 \\
 & & -C & & & & = & -1
\end{array}
$$

od koder izračunamo koeficiente

$$A = 2, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1, \quad E = 0, \quad F = 1,$$

in integral je enak

$$I = \frac{2x^2 + x + 1}{x^5 - x^4 + x + 1} + \log|x| + \operatorname{arc\,tg} x + G.$$

■

Integrali nekaterih algebraičnih funkcij

Oglejmo še nekaj tipičnih integralov, ki jih lahko s primerno substitucijo prevedemo na integrale racionalnih funkcij ali kako drugače integriramo.

1. Začnimo s primerom:

   Primer 5.5.3.
   $$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$$
   prevedemo na racionalen integral z vpeljavo nove spremenljivke
   $$\frac{1-x}{1+x} = t^2, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{-4t\, dt}{(1+t^2)^2}$$
   in dobimo
   $$I = -4 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt,$$
   to pa smo že izračunali v primeru 5.4.5. ■

   Na podoben način lahko integral vsake funkcije, ki se izraža kot racionalna funkcija različnih korenov istega ulomljenega linearnega izraza $(ax + b)/(cx + d)$, prevedemo na integral racionalne funkcije.

2. Integrale, ki vsebujejo izraz $\sqrt{ax^2+bx+c}$ lahko pogosto izračunamo s kakšno trigonometrično ali hiperbolično substitucijo (glej primer 5.4.4). Za integrale oblike

$$I = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx \tag{5.22}$$

pa lahko vnaprej uganemo, s kakšnimi funkcijami se izražajo, kajti funkcijo pod integralom lahko vedno zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} &\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \\ &= \left(Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$I = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{\lambda\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

integral, ki je ostal lahko prevedemo na elementaren integral tako, da izraz pod korenom dopolnimo do popolnega kvadrata.

Primer 5.5.4. Napišimo nastavek za integral

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx = \int \frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx \\ &= (Ax+B)\sqrt{x^2-2x-1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}. \end{aligned}$$

Neznane koeficiente A, B in λ določimo tako, da to enačbo odvajamo:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}} \\ &= A\sqrt{x^2-2x-1} + \frac{(Ax+B)(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x-1}}, \end{aligned}$$

pomnožimo z imenovalcem $\sqrt{x^2-2x-1}$

$$x^2-2x-1 = A(x^2-2x-1) + A(x^2-x) + B(x-1) + \lambda,$$

in primerjamo koeficiente na obeh straneh, da pridemo do sistema linearnih enačb:

$$\begin{array}{rrrcr} 2A & & & = & 1 \\ -3A & +B & & = & -2 \\ -A & -B & +C & = & -1, \end{array}$$

od koder dobimo $A = 1/2$, $B = -1/2$ in $C = -1$. Ker je

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-1}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-2}} = \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|, \end{aligned}$$

je končni rezultat

$$I = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1} - \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|.$$

■

3. Integrali oblike

$$\int \sqrt{P_n(x)}\,dx,$$

kjer je $P_n(x)$ polinom stopnje $n > 2$ se ne izražajo vedno z elementarnimi funkcijami. Če je $n = 3$ ali $n = 4$ jim pravimo *eliptični integrali* in jih lahko z ustrezno vpeljavo nove spremenljivke prevedemo na eno od naslednjih oblik:

$$\begin{array}{rl} \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral prve vrste} \\ \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral druge vrste} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} & \text{eliptični integral tretje vrste,} \end{array}$$

ki so vsi neelementarne funkcije.

4. Integrale oblike

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5.23}$$

kjer so eksponenti m, n in p racionalna števila, a in b pa poljubni, od 0 različni realni konstanti, imenujemo *binomski integrali.* Binomski integrali se izražajo z elementarnimi funkcijami samo v naslednjih treh primerih:

(1) p je celo število — v tem primeru se integral s substitucijo $t = x^k$, kjer je k imenovalec ulomka m, prevede na integral racionalne funkcije;

(2) $(m+1)/n$ je celo število — v tem primeru vpeljemo novo spremenljivko kot $a + bx^n = t^s$, kjer je s imenovalec ulomka p;

(3) $p + (m+1)/n$ je celo število. Novo spremenljivko v tem primeru vpeljemo kot $ax^{-n} + b = z^s$, kjer je s imenovalec ulomka p.

Kadar binomski integral ne ustreza nobenemu od teh treh primerov, ga ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami.

Primer 5.5.5. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$$

To je binomski integral (5.23) z $m = 0$, $n = 3$ in $p = -1/3$, zato novo spremenljivko vpeljemo kot $x^{-3} + 1 = t^3$, oz $x^3 = 1/(t^3 - 1)$, od koder je $-3x^{-4}\,dx = 3t^2\,dt$. Tako dobimo

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{x^4\sqrt[3]{x^{-3}+1}} = \int \frac{-t\,dt}{t^3-1},$$

kar je integral racionalne funkcije, ki ga znamo izračunati:

$$I = \frac{1}{6}\log\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Končni rezultat dobimo ko vstavimo $t = \sqrt[3]{1+x^3}/x$. ■

Integrali trigonometričnih funkcij

Pri integraciji trigonometričnih funkcij si pogosto lahko pomagamo z znanjem trigonometrije.

1. Integrale oblike
$$I = \int \cos^m x \sin^n x \, dx \tag{5.24}$$
najlaže izračunamo, če je vsaj eden od eksponentov liho število. Če je, npr., $m = 2k+1$ liho število, vzamemo za novo spremenljivko $t = \sin x$ (torej $dt = \cos x\, dx$) in dobimo, upoštevajoč še zvezo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, da je
$$I = \int (1-t^2)^k t^n \, dt.$$
To je integral polinoma, kadar sta eksponenta pozitivni števili, sicer pa integral racionalne funkcije.

Če pa sta oba eksponenta v integralu (5.24) sodi števili, v integrandu znižamo eksponente s pomočjo formul
$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} && (5.25)\\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} && (5.26)\\ \sin x \cos x &= \frac{\sin 2x}{2}. && (5.27) \end{aligned}$$

Primer 5.5.6. Izračunajmo integral
$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x (1-\cos 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) \\ &= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C \end{aligned}$$
■

2. Integrale oblike
$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \quad \int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \cos mx \cos nx \, dx$$

poenostavimo s pomočjo formul

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x), \tag{5.28}$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x), \tag{5.29}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x). \tag{5.30}$$

Primer 5.5.7. Izračunajmo integral

$$\begin{aligned}\int \sin 5x \cos x\, dx &= \frac{1}{2}\int \sin 6x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 4x\, dx \\ &= \frac{-1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.\end{aligned}$$

■

3. Integrale oblike

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx, \tag{5.31}$$

kjer je R racionalna funkcija spremenljivk $\sin x$ in $\cos x$, lahko z uvedbo nove spremenljivke $t = \operatorname{tg}(x/2)$ prevedemo v integral racionalne funkcije, saj se $\sin x$, $\cos x$ in dx izražajo kot racionalne funkcije s $\operatorname{tg} x/2$:

$$\sin x = \frac{2\sin x/2 \cdot \cos x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{5.32}$$

$$\cos x = \frac{\sin^2 x/2 - \cos^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5.33}$$

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} t; \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{5.34}$$

Primer 5.5.8. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$$

Z zgornjo substitucijo dobimo

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2t+1+t^2)} = \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \log(1+\operatorname{tg}(x/2)) + C.\end{aligned}$$

■

4. Kadar v integralu (5.31) funkcija R zadošča relaciji

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

(tj. takrat, kadar so vsi členi funkcije R sode stopnje), pridemo do integrala racionalne funkcije učinkoviteje z uvedbo nove spremenljivke $t = \operatorname{tg} x$, saj je

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \tag{5.35}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \tag{5.36}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} \tag{5.37}$$

Čeprav substitucija sama ni racionalna, je njen rezultat, zaradi predpostavke o sodih stopnjah, vedno integral racionalne funkcije, ki je praviloma za polovico nižje stopnje, kot če bi uporabili substitucijo $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

Primer 5.5.9. Izračunajmo integral

$$I = \int \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Nova spremenljivka bo $t = \operatorname{tg} x$, upoštevamo (5.35–5.37) in imamo

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+\frac{1}{1+t^2})} = \int \frac{dt}{2+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

■

Integrali transcendentnih funkcij

Med integrali transcendentnih funkcij je veliko takih, ki jih ne moremo izraziti z elementarnimi funkcijami, nekatere pa s primerno substitucijo ali integracijo po delih prevedemo na racionalne.

Primer 5.5.10.

1. Integrale oblike
$$\int R(e^x)\,dx,$$
kjer je R racionalna funkcija, prevedemo na racionalne integrale s substitucijo $t = e^x$, $x = \log t$, $dx = dt/t$. Na primer
$$\begin{aligned} I = \int \operatorname{th} x\,dx &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx \\ = \int \frac{t - 1/t}{t + 1/t} \cdot \frac{dt}{t} &= \int \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)}\,dt. \end{aligned}$$
Funkcijo pod integralom razcepimo na parcialne ulomke:
$$\begin{aligned} \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1}, \\ t^2 - 1 &= A(t^2 + 1) + (Bt + C)t, \end{aligned}$$
od koder sledi
$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 0$$
in
$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1}{t}\,dt + \int \frac{2t}{t^2 + 1}\,dt \\ &= -\log|t| + \log(t^2 + 1) + C = \log\left|\frac{t^2 + 1}{t}\right| + C. \end{aligned}$$

2. Če v integral
$$I = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$$
vpeljemo
$$\begin{aligned} u = {} & \operatorname{arc\,tg} x, & dv &= dx, \\ du = {} & \frac{dx}{1 + x^2}, & v &= x, \end{aligned}$$

dobimo

$$\begin{aligned} I &= x \operatorname{arc\,tg} x + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= x \operatorname{arc\,tg} x + \log\sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

■

5.6 Nepravi (posplošeni) integrali

Določeni integral smo definirali ob predpostavki, da je integracijski interval končen, funkcija, ki jo integriramo, pa omejena. V tem razdelku bomo pojem integrala posplošili tudi na funkcije, ki niso omejene, in na neskončna integracijska območja.

Vzemimo najprej, da je integracijski interval $[a, b]$ končen, funkcija f pa na njem ni omejena. Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b)$, v točki b naj ima pol.

Izberimo si pozitivno število $\varepsilon < b - a$. Na intervalu $[a, b - \varepsilon]$ je funkcija f zvezna, zato tudi omejena, in določeni integral

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \tag{5.38}$$

obstaja.

Definicija 5.6.1. Če obstaja limita integrala $I(\varepsilon)$ (5.38), ko $\varepsilon \to 0$, ji pravimo *posplošeni* ali *nepravi* integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ in pišemo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Če ima f pol v točki a in je drugod na $(a, b]$ zvezna, definiramo podobno:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

če ta limita obstaja.

Kadar ima f pol v kaki notranji točki $c \in [a, b]$, interval razdelimo na dva podintervala $[a, c]$ in $[c, b]$ ter poiščemo limiti

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \searrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx.$$

Primer 5.6.1.

1. Raziščimo obstoj integrala

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}; \quad p < 0.$$

   Funkcija $1/x^p$ ima pol v $x = 0$, zato je po zgornji definiciji

$$I = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 x^{-p}\,dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_\varepsilon^1 .$$

   Če je $p < 1$, limita na desni obstaja in je enaka $1/(1-p)$, če je $p > 1$, pa funkcija $1/\varepsilon^{p-1}$ z $\varepsilon \to 0$ divergira proti ∞ in integral ne obstaja.

2. Preverimo integrabilnost funkcije $1/(3-x)^2$ na intervalu $[1, 3]$. Funkcija ima pol pri $x = 3$, zato je

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{(3-x)^2} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_1^{3-\varepsilon} \frac{dx}{(3-x)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left[\frac{1}{3-x} \right]_1^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

   ta limita pa ne obstaja, zato funkcija $1/(3-x)^2$ ni integrabilna na intervalu $[1, 3]$. ■

Naj bo funkcija $f(x)$ definirana in omejena na neomejenem intervalu, na primer $[a, \infty)$ in naj bo integrabilnana vsakem končnem podintervalu $[a, b]$.

Definicija 5.6.2. Če obstaja limita

$$I(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

ji pravimo *posplošeni* ali *nepravi* integral funkcije f na intervalu $[a, \infty)$ in pišemo:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Podobno definiramo integral na intervalu $(-\infty, b]$. Integral na intervalu $(-\infty, \infty)$, ki je na obe strani neomejen, je enak

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx,$$

in obstaja, če obe limiti obstajata in sta končni.

Primer 5.6.2. Izračunajmo:

$$I(p) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}.$$

Če je $p < 1$, integral ne obstaja, za $p > 1$ je $I(p) = 1/(p-1)$. ■

Vrednost posplošenega integrala lahko približno izračunamo tako, da ga nadomestimo z določenim integralom, ki se od posplošenega le malo razlikuje, na primer

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \approx \int_a^b f(x)\,dx,$$

za dovolj velik b. Pri tem pa moramo vedeti, ali posplošeni integral sploh obstaja, zato navedimo še nekaj kriterijev, s katerimi si lahko pomagamo pri ugotavljanju obstoja posplošenih integralov.

Limita v definiciji 5.6.2 obstaja natanko takrat, kadar se vrednosti integrala funkcije f na intervalih $[a, b_1]$ in $[a, b_2]$ ne razlikujeta dosti, če sta b_1 in b_2 dovolj veliki števili. Drugače povedano:

Izrek 5.6.1. *Integral funkcije f na intervalu $[a, \infty)$ obstaja, natanko takrat, kadar za vsak ε obstaja tak b, da je*

$$\left| \int_a^{b_1} f(x)\,dx - \int_a^{b_2} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{b_2}^{b_1} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

če sta $b_1, b_2 > b$.

Podoben sklep lahko zapišemo za integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, kjer ima pol. S tem opisom si lahko pomagamo, da dokažemo naslednji izrek:

Izrek 5.6.2. (Primerjalni kriterij) *Naj bo $g(x) > 0$ taka funkcija, definirana na $[a, \infty)$, da za vsak $x \in [a, \infty)$ velja $|f(x)| \leq g(x)$. Če obstaja integral funkcije g na $[a, \infty)$, obstaja tudi integral funkcije f na $[a, \infty)$.*

Dokaz je preprost: za vsak ε obstaja tak b, da je

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \int_{b_1}^{b_2} g(x)\,dx < \varepsilon,$$

če je $b < b_1 < b_2$. $\square$

Primerjalni kriterij smo srečali že pri ugotavljanju konvergence vrst. Tako kot pri vrstah, ga lahko tudi pri integralih uporabljamo v obe smeri: z njim lahko dokažemo, da integral funkcije f obstaja, ali pa, da integral funkcije g ne obstaja.

Podoben kriterij lahko zapišemo za integral na omejenem intervalu, kjer ima funkcija pol.

Primer 5.6.3.

1. Integral
$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^3}\,dx. \tag{5.39}$$
obstaja, ker za vsak $x \in [1, \infty)$ velja $|\cos x| \leq 1$, torej tudi $|x^{-3}\cos x| \leq x^{-3}$, in ker obstaja integral
$$\int_1^{\infty} x^{-3}\,dx = \lim_{x\to\infty} \left[-2x^{-2}\right]_1^x = 2.$$

2. Prav tako obstaja integral
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}},$$
saj je za vsak $x \in (0, 1]$
$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

pa očitno obstaja.

3. Integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}},$$

ne obstaja, saj za vsak $x \geq 1$ velja $\sqrt[3]{x} \leq \sqrt{x}$, torej je

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2} - 1$$

ne obstaja. ■

Zveza med vrstami in posplošenimi integrali pa se še nadaljuje:

Izrek 5.6.3. *Če je $f(x)$ nenegativna zvezna in padajoča funkcija na $[a,\infty)$, posplošeni integral in vrsta*

$$\int_1^\infty f(x)\, dx \quad in \quad \sum_1^\infty f(n)$$

konvergirata ali pa divergirata hkrati.

Izrek 5.6.3 lahko uporabljamo za dokazovanje konvergence ali divergence integralov, še bolj pogosto pa ga uporabljamo za dokazovanje konvergence ali divergence vrst. V tem primeru mu pravimo *integralski kriterij za konvergenco vrst.*

Dokaz. Ker je funkcija $f(x)$ padajoča, je za vsak $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \geq f(n+1),$$

in za delne vsote vrste veljata oceni:

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} f(n) \geq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \\ &= \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=2}^{N+1} f(n) = S_{N+1} - S_1. \end{aligned}$$

Če je integral konvergenten, za vsak N velja:

$$S_N \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Zaporedje delnih vsot je omejeno in, ker ima same pozitivne člene, je vrsta konvergentna. Če je vrsta konvergentna, velja za vsak N

$$I_N = \int_1^{N} f(x)\,dx \leq \sum_1^{N} f(n) \leq \sum_1^{\infty} f(n).$$

Zaporedje integralov I_N je naraščajoče in omejeno, torej konvergentno, to pa že pomeni, da posplošeni integral obstaja. □

Primer 5.6.4. V 2. poglavju smo s precej težavami dokazali, da je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergentna natanko takrat, kadar je $p > 1$. Preprosteje bi do tega rezultata prišli z uporabo integralskega kriterija, saj je enostavno ugotoviti, da je integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$$

konvergenten za $p > 1$ (glej primer 5.6.2. ■