

3. Izpit iz OME

21. avgust 2019

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedana.

1. [15 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

(b) V kompleksni ravnini skicirajte območji:

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 1, \operatorname{Im}(z) > 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1, \operatorname{Re}(z) > 1\}$$

(c) Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

2. [10 točk] Zaporedja in vrste

(a) Na primeru razložite razliko med infimumom ter spodnjo mejo zaporedja.

(b) Poiščite kakšno konvergentno vrsto z vsoto 2.

3. [15 točk] Funkcije

(a) Za zvezno funkcijo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj velja

$$h(0) = h(1) = -3, \quad h(-2) = h(-1) = h(3) = 1, \quad h(2) = \sqrt{2}.$$

Kolikšno je najmanjše število ničel take funkcije?

(b) Definirajte kakšno funkcijo, za katero obstaja leva limita v 0, desna pa ne.

(c) Definirajte nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk ter podajte kak primer.

4. [30 točk] Odvod

(a) Zapišite definicijo smernega odvoda funkcije dveh spremenljivk.

(b) Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere smerni odvod v točki $(1, 1)$ v smeri $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ je enak 1.

(c) Zapišite definicijo Hessejeve matrike funkcije dveh spremenljivk.

(d) Kakšna je povezava med Hessejevo matriko funkcije f dveh spremenljivk ter lokalnimi ekstremi funkcije f ?

(e) Za zvezno odvedljivo funkcijo $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ naj velja

$$g(-1) = 0, \quad g'(1) = g(1) = g(2) = g(3) = g'(3) = g(4) = 2, \quad g(5) = 3.$$

Kolikšno je najmanjše število stacionarnih točk take funkcije?

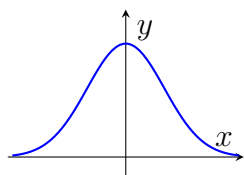
(f) Kaj je vezani ekstrem funkcije f pri pogoju $g(x, y) = 0$?

5. [30 točk] Integral

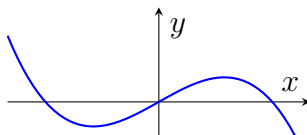
(a) Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije.

(b) Naj bo f soda funkcija, za katero velja $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Izračunajte $\int_{-2}^2 f(x/2)dx$.

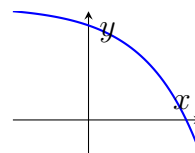
(c) Za funkcije $g, h, k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ imamo podane grafe njihovih **integralov** na intervalu $[-3, 3]$.



graf $\int g(x)dx$



graf $\int h(x)dx$



graf $\int k(x)dx$

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f(0) < 0$. Obkrožite graf funkcije f ?

(d) Naj bo f funkcija iz prejšnje točke. Za vsako izmed vrednosti $f'(-3)$, $f'(3)$ določite, ali je pozitivna, negativna, ali enaka 0.

(e) Zapišite formulo za prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli osi x na intervalu $[a, b]$.

(f) Podajte kakšni funkciji f_1, f_2 s polom v 0, za kateri velja $\int_0^1 f_1(x)dx < \infty$ ter $\int_0^1 f_2(x)dx = \infty$.