· Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

1. izpit iz OME, 23.01.2020

- Čas pisanja: **45 minut**
- Če vam zmanjka prostora za reševanje na poli, to označite in nadaljujte na dodatnem listu.
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk, pri čemer morate pri vsaki nalogi zbrati vsaj 30% točk, tj. 1.5 točke od 5 možnih. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanje, uporaba zapiskov, elektronskih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[5 točk] Matematična indukcija in številske množice**

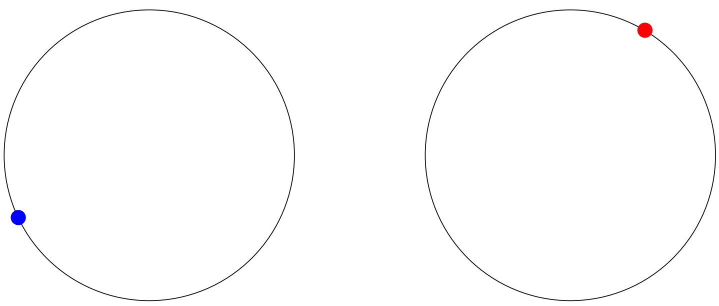
(a) **[1]** Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(3)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+4)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(2020)$? Odgovor dobro utemeljite.

Iz veljavnosti trditve $T(3)$ in implikacije $T(n)$ *velja.* $\Rightarrow T(n+4)$ *velja.*, sledi veljavnost trditve za vsa števila oblike $3+4k, k \in \mathbb{N}$. Ker število 2020 ni te oblike, o veljavnost $T(2020)$ ne moremo sklepati.

(b) **[2]** Razložite pojem n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$. Navedite tudi eksplicitne formule za izračun vseh n-tih korenov števila $a \in \mathbb{C}$.

n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$ je vsaka rešitev enačbe $z^n = a$. Eksplicitne formule za izračun: $z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

(c) **[2]** Naj bo $n_1 = 2$ in $n_2 = 6$. Na levi sliki je eden od n_1-tih, na desni pa eden od n_2-tih korenov nekega kompleksnega števila. Na skicah čim bolj natančno označite ostale korene, tj. n_1-te na levi in n_2-te na desni. Pri tem mora biti jasno razvidno, kako ste jih določili. Upoštevajte, da sta središči krožnic v točki $(0,0)$.



Na levi skici je potrebno modro točko prezrcaliti čez središče, da dobimo še drugo rešitev. Na desni skici moramo točko vrteti za petkrat zavrteti za 60 stopinj, da dobimo še preostalih 5 rešitev. Rešitve na desni strani so oglišča pravilnega šestkotnika.

2. **[5 točk] Zaporedja in vrste**

(a) [**1**] Navedite definicijo supremuma (natančne zgornje meje) zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Število $L \in \mathbb{R}$ je supremum zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če velja $L \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsako drugo število $L' \in \mathbb{R}$, ki tudi zadošča pogoju $L' \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, velja $L' \geq L$.

(b) [**1**] Navedite izrek o konvergenci monotonih zaporedij.

Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki je naraščajoče (oz. padajoče), je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno (oz. navzdol omejeno).

(c) [**3**] Obravnavajte konvergenco naslednjih zaporedij. Odgovore dobro utemeljite. Pri tem se lahko skličete na lastnosti tistih zaporedij in vrst, ki smo jih obravnavali na predavanjih.

i. [**1**] $b_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje delnih vsot harmonične vrste $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ki je divergentna. Zato je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergentno.

ii. [**2**] $c_0 = 0$, $c_n = c_{n-1} + (-1)^n\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ za $n \geq 1$.

Zaporedje $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje delnih vsot alternirajoče vrste

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right).$$

Ker je zaporedje $\left\{e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ padajoče in velja $\lim_{k\to\infty}\left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) = 0$, je po Leibnizovem kriteriju zaporedje $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno.

3. [**5 točk**] **Funkcije**

(a) [**2**] Navedite $\epsilon - \delta$ definicijo zveznosti funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ene spremenljivke v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $x_0 \in \mathbb{R}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz pogoja $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$.

(b) [**3**] Naj bosta dani *zvezna* funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x\nearrow\frac{1}{4}} f(x) = -1, \quad \lim_{x\searrow\frac{1}{2}} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to\frac{3}{5}} f(x) = 5, \quad f(1) = -2,$$

in linearna funkcija $g : [-2, 5] \to [0, 14]$, podana s predpisom $g(x) = 2(x + 2)$. Spodaj je nekaj trditev o funkcijah f, g. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna.

Pozor: za pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tej nalogi ne morete dobiti negativnega števila točk.

i. [**0.5**] f je lahko surjektivna. P / N

Ne, saj zvezna funkcija zaprt omejen interval preslika v zaprt omejen interval. Torej je $f([0, 1]) = [a, b]$ za neka $a, b \in \mathbb{R}$.

ii. [**0.5**] Velja $\lim\limits_{x \searrow \frac{1}{4}} f(x) = -1$. P / N

Da, saj za zvezno funkcijo f velja $\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \searrow \frac{1}{4}} f(x)$.

iii. [**0.5**] f ima vsaj 3 ničle. P / N

Da, zvezna funkcija na zaprtem intervalu zavzame vse vrednosti med najmanjšo in največjo. Tako ima f na intervalih $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ in $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$ vsaj po eno ničlo.

iv. [**0.5**] Velja $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (g \circ f)(x) = 12$. P / N

Da. Velja

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (g \circ f)(x) = g\left(\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)\right) = g(4) = 2 \cdot 6 = 12.$$

v. [**0.5**] Kompozitum $g \circ f$ je surjektiven. P / N

Da. Velja $f([0,1]) = [-2,5]$ in zato $(g \circ f)([0,1]) = g([-2,5]) = [0,14]$.

vi. [**0.5**] Inverz funkcije g je dobro definiran in enak $g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$. P / N

Da. V predpisu $2(x+2) = y$ zamenjamo x, y in izrazimo y. Dobimo $y = \frac{x}{2} - 2$.

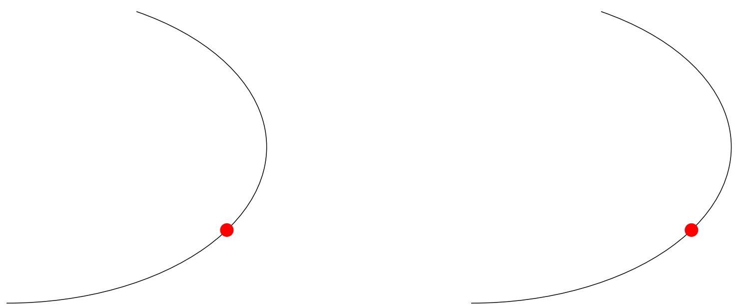
4. [**5 točk**] **Odvod**

(a) [**1**] Zapišite definicijo smernega odvoda odvedljive funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ v točki (x_0, y_0).

Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0, y_0)$ funkcije $f(x,y)$ v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ v točki (x_0, y_0) je enak

$$f_{\vec{e}}(x_0, y_0) = e_1 f_x(x_0, y_0) + e_2 f_y(x_0, y_0).$$

(b) [**1**] Naslednji skici predstavljata del nivojnice neke funkcije dveh spremenljivk. Na **levi** skici v označeni točki narišite smerna vektorja, v katerih funkcija najhitreje spreminja svojo vrednost, na **desni** skici pa smerna vektorja, v katerih se funkcijska vrednost ne spreminja.



Na levi sliki je potrebno narisati vektor v smeri gradienta, tj. pravokotno na krivuljo v označeni točki. Na desni strani je potrebno narisati vektor v smeri tangente na krivuljo v označeni točki.

(c) [**3**] Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Za vsako od točk $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ **utemeljite**, ali je lokalni ekstremi. Vsak lokalni ekstrem tudi klasificirajte.

i. **[1]** $f_x(P) = f_y(P) = 0$, $f_{xx}(P) = 3, f_{xy}(P) = -1, f_{yy}(P) = 1$.

Točka P je stacionarna, saj je $f_x(P) = f_y(P) = 0$. Hessejeva matrika $H_f(P)$ je enaka $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Njena determinanta je $3 - 1 = 2 > 0$. Torej je P ekstrem. Ker je $f_{xx}(P) > 0$, gre za lokalni minimum.

ii. **[1]** $f_x(R) = 0$, $f_y(R) = -1$, $f_{xx}(R) = 3, f_{xy}(R) = 0, f_{yy}(R) = 2$.

Točka R ni stacionarna, saj je $f_y(R) \neq 0$. Torej R ni lokalni ekstrem.

iii. **[1]** $f_x(Q) = f_y(Q) = 0$, $f_{xx}(Q) = 3, f_{xy}(Q) = 2, f_{yy}(Q) = 1$.

Točka Q je stacionarna, saj je $f_x(Q) = f_y(Q) = 0$. Hessejeva matrika $H_f(Q)$ je enaka $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Njena determinanta je $3 - 4 = -1 < 0$. Torej je Q sedlo.

5. **[5 točk] Integral**

(a) **[1]** Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Nedoločeni integral funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je vsaka funkcija $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, ki zadošča $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a, b)$.

(b) **[1]** Naj bosta F, G nedoločena integrala funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemer je $F(1) = 0$, $G(1) = 2$ in $F(5) = 4$. Koliko je $G(5)$? Odgovor utemeljite (številski odgovor ne zadošča).

Nedoločeni integral funkcije je do konstante natančno določen. Torej je $(F - G)(x) = C$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Iz $F(1) - G(1) = -2$ sledi, da je $C = -2$. Od tod izračunamo $G(5) = F(5) - C = 4 + 2 = 6$.

(c) **[3]** Dana je funkcija $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Ena od lastnosti te funkcije je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Spodaj je navedenih nekaj trditev o funkciji f. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna. **Pozor:** za pravilni odgovor dobite 0.5 točke, za napačnega 0.5 točke *izgubite*. Če ne odgovorite, dobite 0 točk. Skupno pri tej nalogi ne morete dobiti negativnega števila točk.

i. **[0.5]** f je liha. P / N

Da. Naj bo $x > 0$. Velja

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = -\int_x^0 e^{-u^2}(-du) = \int_x^0 e^{-u^2}(du) = -\int_0^x e^{-u^2} du = -F(x),$$

kjer smo v drugi in peti enakosti uporabili definicijo integrala, ko zamenjamo meji, v tretji enakosti pa naredili substitucijo $u = -t$.

ii. **[0.5]** f je naraščajoča. P / N

Da. Po osnovnem izreku integralskega računa velja $f'(x) = e^{-x^2}$. Torej je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in f je naraščajoča.

iii. [**0.5**] Točka $x = 0$ je stacionarna točka funkcije f. P / N

Ne. Ne velja namreč $f'(0) = 0$. Velja $f'(0) = e^0 = 1$.

iv. [**0.5**] f ima natanko en prevoj. P / N

Da. Velja $f''(x) = -2xe^{-x^2}$. Torej je $f''(x) = 0$ natanko za $x = 0$.

v. [**0.5**] f je konveksna na poltraku $[0, \infty)$. P / N

Ne. Velja $f''(x) = -2xe^{-x^2} \geq 0$ za $x \leq 0$. Torej je f konveksna na poltraku $(-\infty, 0]$.

vi. [**0.5**] f ima lokalne, nima pa globalnih ekstremov. P / N

Ne. f nima lokalnih ekstremov, saj je $f'(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

6. [**5 točk**] **Diferencialne enačbe**

(a) [**1**] Navedite definicijo diferencialne enačbe 1. reda z ločljivima spremenljivkama.

To je diferencialna enačba oblike $h(x)y'(x) = f(y)$, kjer sta h, f neki funkciji.

(b) [**4**] Rešite diferencialno enačbo $y'(x) + 2y(x) = 2$ z začetnim pogojem $y(0) = 2$.

Najprej rešimo homogeni del DE, tj. $y' + 2y = 0$. Uporabimo separacijo spremenljivk.

$$\frac{dy}{-2y} = dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log|y| = x+C \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -2(x+C) \quad \Rightarrow \quad y_h(x) = Ke^{-2x},\ K \in \mathbb{R}.$$

V zadnji implikaciji smo uvedli novo konstanto $K = \pm e^{-2C}$, pri čemer je predznak odvisen od predznaka y.

Sedaj moramo najti partikularno rešitev. Poskušamo z ugibanjem glede na izgled desne strani: $y_p(x) = C$, kjer je C neka konstanta. Vstavimo v DE in dobimo

$$y'(x) + 2y(x) = 0 + 2C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = 1.$$

Torej je splošna rešitev DE

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^{-2x} + 1.$$

Sedaj upoštevamo še pogoj $y(0) = 2$, da določimo K:

$$y(0) = K + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 1.$$

Rešitev DE, ki gre skozi točko $(0, 2)$, je $y(x) = e^{-2x} + 1$.