

Izpit iz Matematike

26. avgust 2011

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Vektorji

(a) Produkt vektorja $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ s številom a je enak _____.

Linearna kombinacija vektorjev \vec{x} in \vec{y} je _____.

(b) Koliko je enotskih vektorjev, ki so pravokotni na vektorja $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

Določite ga/ju/jih.

V \mathbb{R}^3 naj bosta podani ravnina $\Sigma : 2x + y - 3z = 0$ ter premica p , določena z enačbo $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{3}$.

(c) Določite takšna a in b , da bo premica p prebadala ravnino Σ pravokotno.
V kateri točki jo prebada?

(d) Določite nek enotski vektor, ki je pravokoten na premico p .

(e) Določite nek enotski vektor, ki leži v ravnini Σ .

2. [20 točk] Matrike

(a) Obkrožite vse pravilne trditve o determinantah:

- i. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
- ii. $\det(A) = \det(A^T)$
- iii. $\det(3A) = 3 \det(A)$
- iv. Če je matrika A obrnljiva, potem je $\det(A) \neq 0$

(b) Katerim matrikam lahko izračunamo determinanto?

(c) Matriko A bi radi pomnožili z vektorjem $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, matriko A^T pa z vektorjem $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Kakšna mora biti velikost matrike A , da bomo to lahko storili?

Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) Določite število a tako, da bo determinanta matrike A enaka 7.

(e) Pri tako izbranem a je rang matrike A^T enak _____.

3. [8 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je kartezični (komponentni) zapis kompleksnega števila $z = a(\cos \varphi + i \sin \varphi)$? Narišite sliko in napišite zveze.

(b) V kompleksni ravnini narišite število $\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$ in ga zapišite v kartezični obliki.

4. [12 točk] Zaporedja

(a) Zaporedje (a_n) je navzgor omejeno, če _____
_____.

(b) Zaporedje s splošnim členom $\frac{2}{3^n}$ je (obkrožite vse pravilne odgovore)

- i. navzgor omejeno
- ii. naraščajoče
- iii. konvergentno
- iv. padajoče

(c) Izračunajte $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n+1}$.

5. [12 točk] Števila, funkcije

(a) Za funkcijo $f(x) = \sqrt{1-x}$, ki preslika $[-1, 1]$ v interval $[0, \sqrt{2}]$ določite definicijsko območje in zalogo vrednosti.

(b) Katere od naslednjih funkcij so sode? Katere so lihe? Katere so sode in lihe? Katere niso niti sode niti lihe?

- i. $f(x) = 3x^4 + x^2 - 5$
- ii. $g(x) = 2x^3 - 3x^2$
- iii. $h(x) = \sin x - \cos x$
- iv. $i(x) = \frac{e^x - 1}{e^{-x} + 1}$

(c) Skicirajte grafe funkcij $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$, $g(x) = \frac{x}{|x|}$ in $h(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Posebej pazite na zveznost teh funkcij!

6. [28 točk] Odvod in integral

(a) Zapišite definicijo diferenciala df funkcije f v točki a .

(b) Kaj nam odvod f' pove o ekstremnih točkah funkcije f ?

(c) Za funkcijo $f(x) = x^2 \sin x^2$ določite

$$f'(x) = \underline{\hspace{15cm}}$$

(d) Zapišite največji interval okoli $x = 1$ na katerem funkcija f narašča!

(e) Naj bo $g(x) = 2x \sin(x^2) + 2x^3 \cos(x^2)$. Izračunajte $\int g(x) dx$.

(f) Zapišite največji interval okoli od $x = \frac{\pi}{4}$ na katerem funkcija $\int f(x) dx$ narašča!

(g) Kaj je povprečna vrednost funkcije h na intervalu $[a, b]$?