Ime in priimek: ________________________ Vpisna številka: ___________________

Rešitve izpita iz Matematike, ki jih morda ne najdete na zapiskih s predavanj 26. januar 2011

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. **[16 točk] Vektorji**

(a) Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ označimo z ______________ in je enak ____.

(b) Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna, ko velja _____$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$_____.

(c) Kaj mora veljati za vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da bosta vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ pravokotna? *Vektorja $\vec{a} + \vec{b}$ in $\vec{a} - \vec{b}$ sta pravokotna, ko velja $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, torej*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0.$$

Upoštevamo simetričnost skalarnega produkta ter definicijo dolžine vektorja in dobimo $||\vec{a}|| = ||\vec{b}||$.

(d) Če je $||\vec{c}|| = 2$, $||\vec{d}|| = 1$ in $\vec{c} \cdot \vec{d} = \sqrt{2}$, potem je kot med vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{d}$ enak _____$\frac{\pi}{4}$_____.

Če označimo z α kot med $\vec{c}$ in $\vec{d}$, potem je

$$\cos \alpha = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{||\vec{c}|| \, ||\vec{d}||} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

torej $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. **[20 točk] Matrike**

   (a) Kaj je rang matrike?

   (b) Če je rang 2011×2011 matrike A enak 2009, potem je njegova determinanta enaka

   _____0_____.

Naj bo $A = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 10 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

   (c) Določite število a tako, da bo rang matrike A enak 2.
   $a = 3$

   (d) Pri tako izbranem a je rang matrike A^T enak _____0_____.

   (e) Če je $a = 2$, ima sistem $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ _____1_____ rešitev.

3. **[12 točk] Kompleksna števila**

   (a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite zveze.

   (b) V kompleksni ravnini narišite število $-i$ in ga zapišite v polarni obliki.
   _____ $-i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ _____ .

   (c) Poiščite vse rešitve enačbe $z^4 + i = 0$ in jih narišite v kompleksni ravnini.
   Ker je $z^4 = -i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, je

$$z_k = e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi+4k\pi}{8}}$$

   za $k = 0, 1, 2, 3$, torej

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\frac{3\pi}{8}}, \\ z_2 &= e^{i\frac{7\pi}{8}}, \\ z_3 &= e^{i\frac{11\pi}{8}}, \\ z_4 &= e^{i\frac{15\pi}{8}}. \end{aligned}$$

4. **[12 točk] Zaporedja**

(a) Število L je limita zaporedja (a_n), če

(b) Število e je definirano kot _____ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ _____.

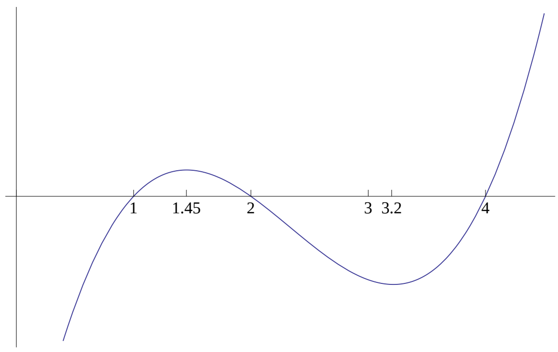
(c) Izračunajte $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n+1} = e^2$.

5. **[20 točk] Odvod**

(a) Zapišite definicijo odvoda funkcije f v točki a.

(b) Kaj nam odvod f' pove o naraščanju in padanju funkcije f?

Za funkcijo f ima **njen odvod f'** naslednji graf:



(c) Na katerih območjih znotraj intervala $[0.5,\ 4.5]$ funkcija f pada?
na $[0.5,\ 1] \cup [2, 4]$.

(d) V katerih točkah znotraj intervala $[0.5, 4.5]$ ima funkcija f lokalne ekstreme? Za vsakega zapišite tudi, ali je lokalni maksimum ali minimum.
$x = 1$ *ter* $x = 4$ *sta lokalna minimuma,* $x = 2$ *je lokalni maksimum.*

(e) Na katerih območjih znotraj intervala $[0.5,\ 4.5]$ je funkcija f konkavna? $[1.45, 3.2]$

6. **[20 točk] Določeni integral**

(a) Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ je ______________________________

____.

(b) Če označimo $F(x) = \int f(x)\,dx$, potem je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\quad F(b) - F(a) \quad}.$$

(Izrazite s funkcijo F.)

(c) Če je $a < b < c$, potem je

$$\int_a^b f(u)\,du + \int_b^c f(t)\,dt = \underline{\quad \int_a^c f(x)\,dx \quad}.$$

(d) Naj bo f soda funkcija, za katero velja $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ in g liha funkcija, za katero velja $\int_0^1 g(x)\,dx = 5$. Potem je

$$\int_{-1}^1 (2f(x)+3g(x))\,dx = \underline{\quad 2\cdot \int_{-1}^1 f(x)\,dx + 3\cdot \int_{-1}^1 g(x)\,dx = 2\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 0 = 16 \quad}.$$

(e) Izračunajte naslednji integral:

$$\int_{-1}^1 x^3 e^{|x^2-1|}\,dx = \underline{\quad 0 \quad}.$$