2. popravni kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 13. 2. 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$

1. Izračunaj vsoto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n-2}}$ in limito $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

   Rešitev: (a) Računamo $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{2n-2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^{n-1}} = \frac{1}{4^{-1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n} = \frac{1}{4^{-1}}\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3\frac{1}{1-3/4} = \underline{\underline{12}}$
   (b) Limita je tipa $\infty-\infty$, kar je nedoločen izraz, torej ga moramo preoblikovati. Velja $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$, in limita tega je $\frac{2}{\infty+\infty} = \frac{2}{\infty} = \underline{\underline{0}}$.

2. Določi $a, b \in \mathbb{R}$, da bo naslednja funkcija zvezna:

$$f(x) = \begin{cases} x+2a+be^x, & x<0 \\ 2b\cos(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ ax+2, & 1<x \end{cases}$$

   Rešitev: Ker so zgornje tri funkcije elementarne (in zato zvezne), je f zvezna natanko tedaj, ko je $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$ in $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} f(x)$. Naš sistem enačb

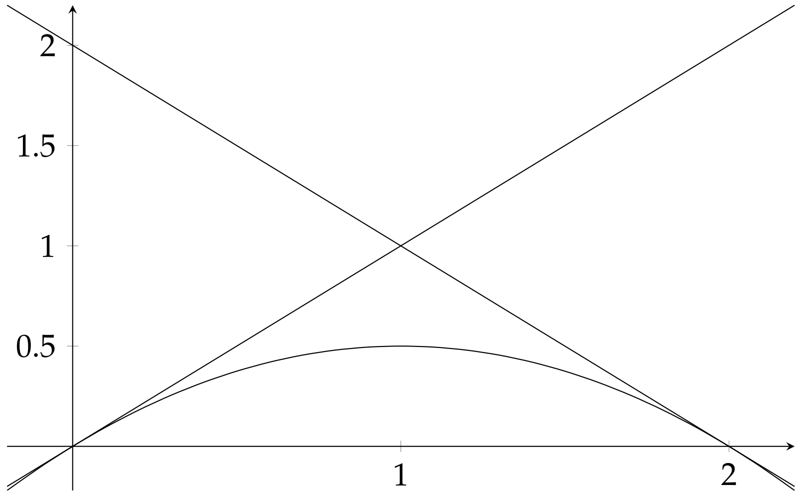
$$\begin{aligned} &\lim_{x\uparrow 0} x+2a+be^x = 2a+b = 2b = \lim_{x\downarrow 0} 2b\cos(\pi x) \\ &\lim_{x\uparrow 1} 2b\cos(\pi x) = -2b = a+2 = \lim_{x\downarrow 1} ax+2 \end{aligned}$$

   se poenostavi v $2a=b$, $-2b=a+2$ in ima rešitev $\underline{\underline{a=\frac{-2}{5}, b=\frac{-4}{5}}}$.

3. Določi ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje

$$y=x, \quad y=2-x, \quad y=x-x^2/2.$$

   Rešitev: Presečišči treh krivulj so tam, kjer je $x=2-x$ ali $x=x-x^2/2$ ali $2-x=x-x^2/2$, oziroma $x=1$ ali $x=0$ ali $x=2$.



Območje leži med parabolo in zgornjo premico (na levem kosu je to x, na desnem pa $2-x$), torej je ploščina $\int_0^1 \left(x-(x-\frac{x^2}{2})\right)dx + \int_1^2 \left((2-x)-(x-\frac{x^2}{2})\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}dx + \int_1^2 (2-2x+\frac{x^2}{2})dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + (2x-x^2+\frac{x^3}{6})\Big|_1^2 = \frac{1}{6}+2-3+\frac{7}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$.

4. Presek ravnin Σ_1: $x+y-z=2$ in Σ_2: $2x+3y+4z=1$ je premica p. Poišči smerni vektor $\vec{s}$ od p in neko točko P na p. V kakšni zvezi sta $\vec{s}$ in P z rešitvami sistema enačb

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right]?$$

Rešitev: Točke, ki ležijo na obeh ravninah, zadoščajo obema enačbama, torej so natanko rešitve sistema. Iz reševanja sistema

$$\begin{array}{l} (1): \\ (2)-2(1): \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} (1)-(2): \\ (2): \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{array}\right]$$

vidimo, da je rešitev enoparametrična družina (parameter je z). Iz druge enačbe dobimo $y=-6z-3$ in iz prve $x=7z+5$, torej $(x,y,z)=(7z+5,-6z-3,z)=(7z,-6z,z)+(5,-3,0)$, kjer je z poljuben, zato ima p smerni vektor $\underline{\underline{(7,-6,1)}}$ in točko $\underline{\underline{(5,-3,0)}}$.