1. popravni kolokvij iz Matematike

(Ljubljana, 26. 1. 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

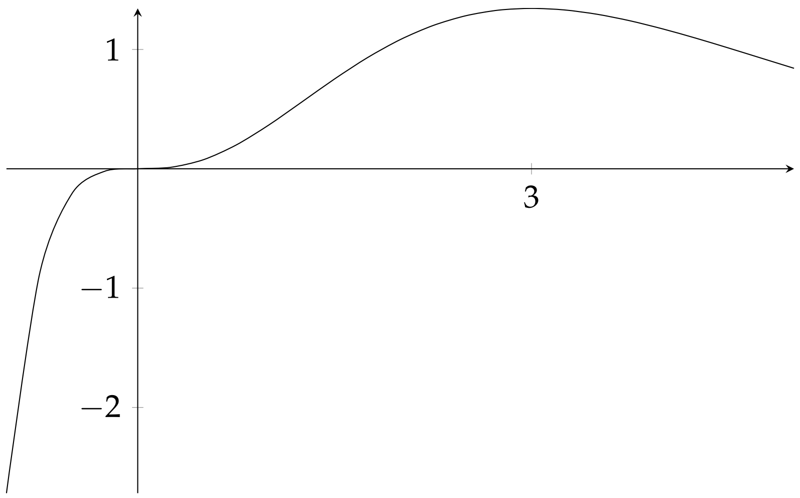
Vse odgovore dobro utemelji!

1. **(a)** Z uporabo polarnega zapisa izračunaj $(-1+i)^{10}$.
   (b) Poišči *vse* $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $z^3 = -1+i$.

   Rešitev: (a) Naš $-1+i$ ima radij $r = \sqrt{2} = 2^{1/2}$ in kot $\varphi = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$, torej $(-1+i)^{10} = (re^{\varphi i})^{10} = r^{10}e^{10\varphi i} = 2^5 e^{i15\pi/2} = \underline{\underline{2^5 e^{-i\pi/2}}} = \underline{\underline{-32i}}$.
   (b) Enačba $z^n = re^{i\varphi}$ ima rešitve $z = r^{1/n}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$ za $k = 0, \ldots, n-1$. V našem primeru je to $z = 2^{1/6}e^{i(3\pi/4+2k\pi)/3}$ za $k = 0, 1, 2$, torej $z = \underline{\underline{2^{1/6}e^{i\pi/4}, 2^{1/6}e^{i11\pi/12}, 2^{1/6}e^{i17\pi/12}}}$.

2. Za funkcijo $f(x) = x^3 e^{-x}$ določi definicijsko območje, ničle, obnašanje neskončnosti ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$), izračunaj odvod, poišči lokalne ekstreme in prevoje, ter *skiciraj graf*.

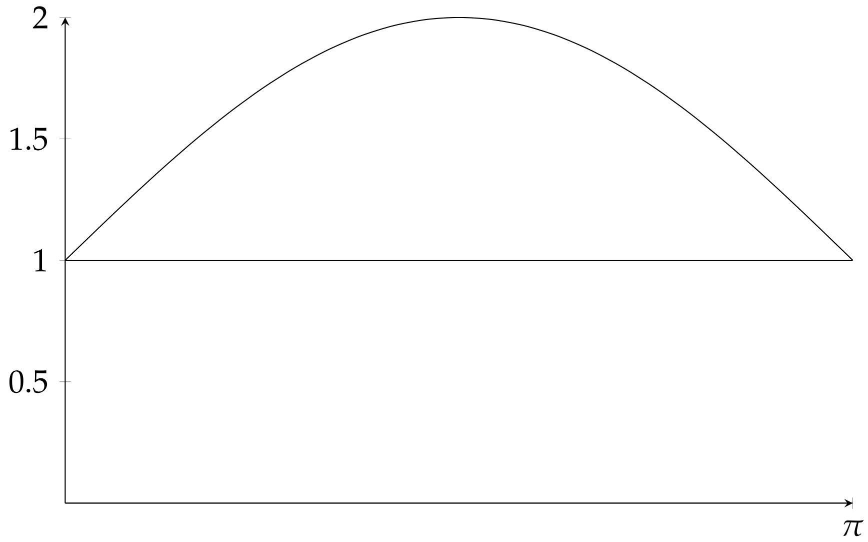
   Rešitev: Za $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ je $D_f = \mathbb{R}$, edina ničla je pri $x = 0$, velja



$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{\infty} = 0$ in $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{-\infty}{+0} = -\infty$. Odvod je $f'(x) = \frac{3x^2e^x - x^3e^x}{e^{2x}} = \frac{x^2(3-x)}{e^x}$, torej sta kritični točki $x=0,3$, ker je $f''(x)=\frac{(6x-3x^2)e^x-(3x^2-x^3)e^x}{e^{2x}}=\frac{6x-6x^2+x^3}{e^x}$, $f''(0)=0$, $f''(3)=\frac{-9}{e^3}<0$, torej je v 0 prevoj, v 3 maksimum, na $(-\infty,3)$ narašča, na $(3,\infty)$ pada.

3. Območje v ravnini, ki ga omejujejo grafa funkcij $y=1+\sin(x)$ in $y=1$ na intervalu $[0,\pi]$, zavrtimo okoli x-osi. Izračunaj volumen nastalega telesa.

   Rešitev: Območje, ki ga zavrtimo, ima obliko:



   Volumen nastalega telesa (obroč z odštetim sredinskim valjem) je enak $\pi\int_0^{\pi}(1+\sin x)^2dx-\pi\int_0^{\pi}1^2dx=\pi\int_0^{\pi}(2\sin x+\sin^2 x)dx=\pi\int_0^{\pi}(2\sin x+\frac{1-\cos(2x)}{2})dx=\pi(-2\cos x+\frac{x-\sin(2x)/2}{2})\Big|_0^{\pi}=\underline{\underline{\frac{\pi(\pi+8)}{2}}}$.

4. Naj bo p premica skozi točko $P(0,3,5)$ s smerjo $\vec{a}=(1,2,3)$. Naj bo q premica skozi točko $Q(3,-1,2)$ s smerjo $\vec{b}=(2,-1,0)$. Poišči točko T, kjer se p in q sekata, ter določi kot med njima.

   Rešitev: Dani premici imata parametrično izražavo $p:\ P+s\vec{a}=(s,3+2s,5+3s)$ in $q:\ Q+t\vec{b}=(3+2t,-1-t,2)$. Če iz prve enačbe izrazimo s, dobimo $x=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{3}$, in ko drugo enačbo vstavimo notri, dobimo $3+2t=\frac{-1-t-3}{2}=\frac{2-5}{3}$ oziroma $3+2t=\frac{-4-t}{2}=-1$ in zato $t=-2$, torej je presečišče $T=(3+2t,-1-t,2)=\underline{\underline{(-1,1,2)}}$.

   Če je φ kot med p in q, potem je $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\varphi$, torej $\varphi=\arccos\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\arccos\frac{0}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}=\underline{\underline{90^\circ}}$.