1. kolokvij iz Matematike

(Ljubljana, 8. 12. 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. **[25. točk]** Podani sta kompleksni števili $a = i$ in $b = 1 + i$.

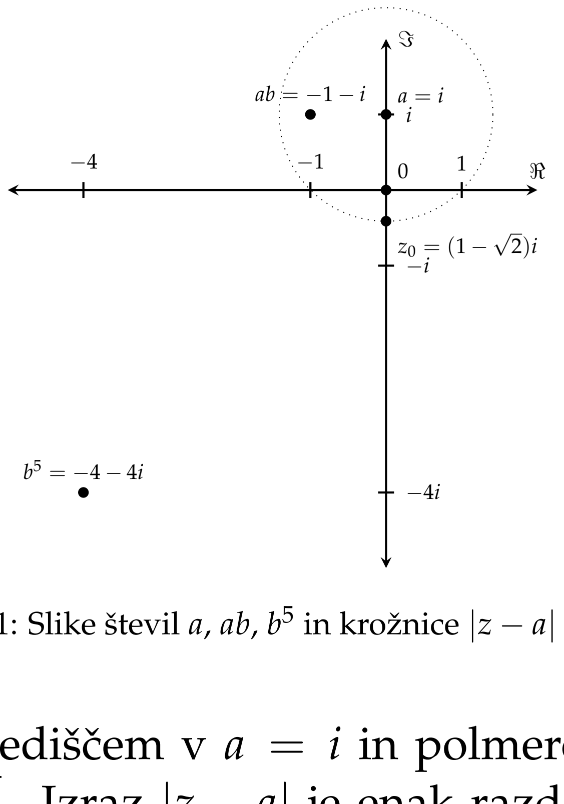
   (a) Števila a, b^5 in ab narišite v kompleksni ravnini.

   (b) Poišči število z, ki reši enačbo $|z - a| = |\bar{b}|$ in ima najmanjšo absolutno vrednost.

   Rešitev: Najprej števila izračunamo: $a = i, ab = i(1 + i) = i - 1$

$$b^5 = (1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^5 = \sqrt{2}^5 e^{i5\pi/4}$$
$$= 4\sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\pi/4} = 4(-1)(1+i) = -4-4i. \quad (1)$$

Kompleksna števila, ki zadoščajo enačbi $|z - a| = |b|$, ležijo



Slika 1: Slike števil a, ab, b^5 in krožnice $|z - a| = \sqrt{2}$

na krožnici s središčem v $a = i$ in polmerom $|b| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Izraz $|z - a|$ je enak razdalji med števili z in

a. Število z_0 z najmanjšo absolutno vrednostjo, ki reši enačbo, je točka na krožnici, ki je najbližje koordinatnemu izhodišču, to je številu 0. Točka, ki jo iščemo leži na imaginarni osi in je enaka $z_0 = (1-\sqrt{2})i$.

2. **[20 točk]** Zaporedje je podano z

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{2+3n^2}}.$$

(a) Pokaži, da je zaporedje naraščajoče.

(b) Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Rešitev:

(a) Velja $a_n \le a_{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{2+3n^2}} \le \frac{n+1}{\sqrt{2+3(n+1)^2}}$, in ker je $n \in \mathbb{N}$ sta obe strani pozitivni, torej kvadriranje da $\Leftrightarrow \frac{n^2}{2+3n^2} \le \frac{(n+1)^2}{2+3(n+1)^2}$ $\Leftrightarrow n^2(2+3(n+1)^2) \le (n+1)^2(2+3n^2) \Leftrightarrow 2n^2+3n^2(n+1)^2 \le 2(n+1)^2+3n^2(n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 \le 2(n+1)^2$, kar je res za vse n.

(b) Velja $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{2+3n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n:n}{\sqrt{2+3n^2}:n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(2+3n^2)/n^2}}$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2/n^2+3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{0+3}}}}$.

3. **[30 točk]** Funkcija f ima predpis $f(x) = \sqrt{2-x^2}$.

(a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f.

(b) Določi ničle, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja in natančno nariši graf funkcije f.

(c) Poišči enačbo tangente na graf funkcije f v točki $x = 1$.

(d) Izračunaj integral

$$\int x f(x) \mathrm{d}x.$$

Rešitev:

(a) Definicijsko območje funkcije je območje, kjer je $2-x^2 \ge 0$, saj je kvadratni koren definiran le za pozitivna števila. Rešitev neenačbe je

$$2-x^2 \ge 0 \Longleftrightarrow 2 \ge x^2 \Longleftrightarrow -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}.$$

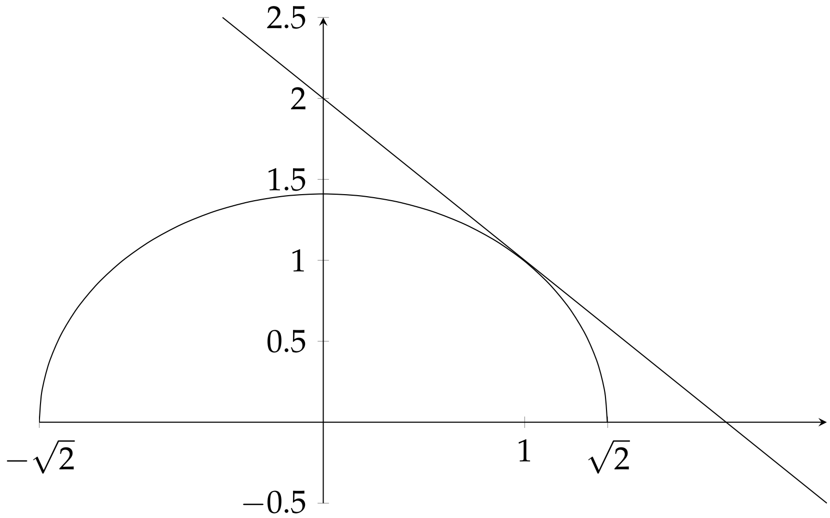
(b) Ničle so rešitve enačbe $f(x) = 0$ oziroma

$$\sqrt{2-x^2} = 0 \Longleftrightarrow 2 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 2 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\sqrt{2-x^2}\right)' &= \left(\left(2-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' \\ &= \frac{1}{2}\left(2-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}. \end{aligned}$$

Stacionarna točka je le ena in sicer $x = 0, f(0) = \sqrt{2}$. Ker je $f'(x) < 0$ za $x < 0$ in $f'(x) > 0$ za $x > 0$, je v $x = 0$ lokalni maksimum. Na intervalu $(-\sqrt{2}, 0)$ funkcija f narašča, na intervalu $(0, \sqrt{2})$ pa pada.



Slika 2: Graf funkcije $f(x)$ in tangente na graf v točki $(1, 1)$

(c) Enačba tangente določimo s koeficientom

$$k_T = f'(1) = \frac{-1}{\sqrt{2-1}} = -1$$

in dotikališčem $(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$. Enačba premice je oblike $y = k_T x + n = -x + n$, vrednost n določimo, če v enačbo vstavimo dotikališče $1 = -1 + n \Longrightarrow n = 2$. Enačba tangente je

$$y = -x + 2.$$

(d) Integral rešimo z vpeljavo nove spremenljivke $t = 2 - x^2 \implies dt = -2x dx$.

$$\int x f(x) dx = \int x\sqrt{2 - x^2} dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{2 - x^2}^3 + C.$$

4. **[25 točk]** Za tri števila a, b, c iz intervala [-2; 2] velja, da je vsota prvega in drugega enaka 1, vsota drugega in tretjega pa enaka 2. Kolikšna je najmanjša vrednost produkta abc vseh treh števil?

Rešitev: Velja $a+b=1$ in $b+c=2$, torej $b=1-a$ in $c=2-b=2-(1-a)=1+a$, zato je $abc=a(1-a)(1+a)=a(1-a^2)=a-a^3$. Velja

$$-2 \leq a, b, c \leq 2 \iff -2 \leq a, 1-a, 1+a \leq 2 \iff (-2 \leq a \leq 2) \wedge (-1 \leq a \leq 3) \wedge (-3 \leq a \leq 1) \iff a \in [-1, 1].$$

Iščemo torej minimum funkcije $f(x) = x - x^3$ na $[-1, 1]$. Ker je f povsod definirana in zvezna, je njen minimum bodisi v stacionarni točki (tam kjer je odvod nič) ali pa v krajišču intervala. Velja $f'(x)=1-3x^2$ in

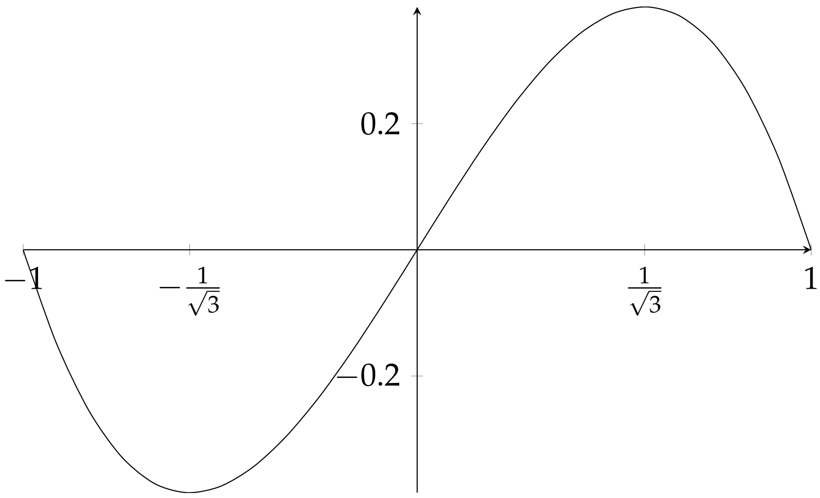
$$f'(x)=0 \iff 1=3x^2 \iff x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Tako je $f(1)=1-1^3=0$, $f(-1)=0$,

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}^3}=\frac{\sqrt{3}^2-1}{\sqrt{3}^3}=\frac{2}{\sqrt{3}^3},$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{2}{\sqrt{3}^3},$$

torej je minimum $f(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\underline{\underline{-\frac{2}{\sqrt{3}^3}}}$.



Slika 3: Graf produkta $abc = a(1-a)(1+a)$ v odvisnosti od a.