

MATRIKE

Dimenzija matrice: $m \times m$
 ↑ ↑
 m vrstic m stolpcev

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 3 \times 2$$

Operacije z matrikami:

• Seštevanje matrik:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

• Množenje s številom

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

• Množenje matrik $A_{\underline{m} \times \underline{m}} \cdot B_{\underline{m} \times \underline{r}} = (AB)_{\underline{m} \times \underline{r}}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$\underline{3} \times \underline{2}$ $\underline{2} \times \underline{2}$ $\underline{3} \times \underline{2}$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 3 \\ -2 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

• Transponiranje matrik $(A_{m \times n})^T = A^T_{n \times m}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2×3 3×2

1. Dane so matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriko $(BA)^T + 2C^2 - I_3$, kjer je I_3 identična matrika velikosti 3×3 .

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) & 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

3×2 2×3 3×3

$$= \begin{bmatrix} 5 & -6 & 15 \\ -6 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B \cdot A)^T = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -6 & 20 & 0 \\ 15 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2C^2 = 2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 5 & 5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(BA)^T + 2C^2 - I_3 =$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ -6 & 20 & 0 \\ 15 & -18 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -4 & 14 \\ 4 & 29 & 32 \\ 15 & -18 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Izračunaj inverze spodnjih matrik:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz matrike A : A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Inverz matrike dobimo s pomočjo Gaussove eliminacije:

$$\left[A \mid I \right] \sim \dots \sim \left[I \mid A^{-1} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} /:2 \\ \leftarrow \oplus \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{array} \right] \sim \begin{array}{l} \leftarrow \ominus \\ \leftarrow \ominus \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} /:2 \\ /:2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 \end{array} \right]$$

$\overset{A^{-1}}{\text{A}^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Reši matrične enačbe z neznanimi matrikami X, Y, Z.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, (b) $Y \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$.

$\begin{matrix} 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \end{matrix}$

1. način:

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a+2c=3 \quad | \cdot (-2) \\ 3a+4c=5 \\ \hline -2a-4c=-6 \quad (+) \\ \hline a=-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} b+2d=5 \quad | \cdot (-3) \\ 3b+4d=9 \\ \hline -3b-6d=-15 \quad (+) \\ \hline -2d=-6 \quad | : (-2) \\ d=3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1+2c=3 \\ 2c=4 \rightarrow c=2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b+2 \cdot 3=5 \\ b=5-6=-1 \end{array}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. način:

$$\begin{aligned} A \cdot X &= B \quad | \cdot A^{-1} \\ A \cdot X \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot \{ A \cdot X &= B \\ A^{-1} \cdot A \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ \underbrace{A^{-1} \cdot A}_I \cdot X &= A^{-1} \cdot B \\ IX &= A^{-1} \cdot B \\ X &= A^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \cdot A &= B \quad | \cdot A^{-1} \\ X \cdot A \cdot A^{-1} &= B \cdot A^{-1} \\ \underbrace{X \cdot A \cdot A^{-1}}_I &= B \cdot A^{-1} \\ X &= B \cdot A^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (-3) \cdot \downarrow \oplus \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \oplus \\ \leftarrow \oplus \end{matrix} \sim \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2) \cdot 3 + 1 \cdot 5 & (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 9 \\ \frac{3}{2} \cdot 3 + (-\frac{1}{2}) \cdot 5 & \frac{3}{2} \cdot 5 + (-\frac{1}{2}) \cdot 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Reši matrične enačbe.

(a) $A^2X - 3X = B$, če je $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $AX - B = 2X$, če je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\& \quad A \cdot X - B = 2X$$

$$AX - 2X = B$$

$$(A - 2I)^{-1} \cdot (A - 2I)X = B$$

$$X = (A - 2I)^{-1} \cdot B$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{+} \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} A-2I \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \underline{2} & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{1} & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \cdot 2 \\ \sim \downarrow \textcircled{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \sim \cdot (-1) \\ \leftarrow \textcircled{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \sim \leftarrow \textcircled{+} \\ \cdot 5 \textcircled{+} \\ \cdot 2 \textcircled{+} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} \cdot (-1) \\ \cdot (-1) \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$(A-2I)^{-1}$

$$X = (A-2I)^{-1} \cdot B = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] = \\ \underline{3 \times 3} \quad \underline{3 \times 1} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right] \end{array}$$

a)

$$A^2 X - 3X = B$$

$$(A^2 - 3I)^{-1} \cdot (A^2 - 3I) X = B$$

$$X = (A^2 - 3I)^{-1} \cdot B$$

⋮