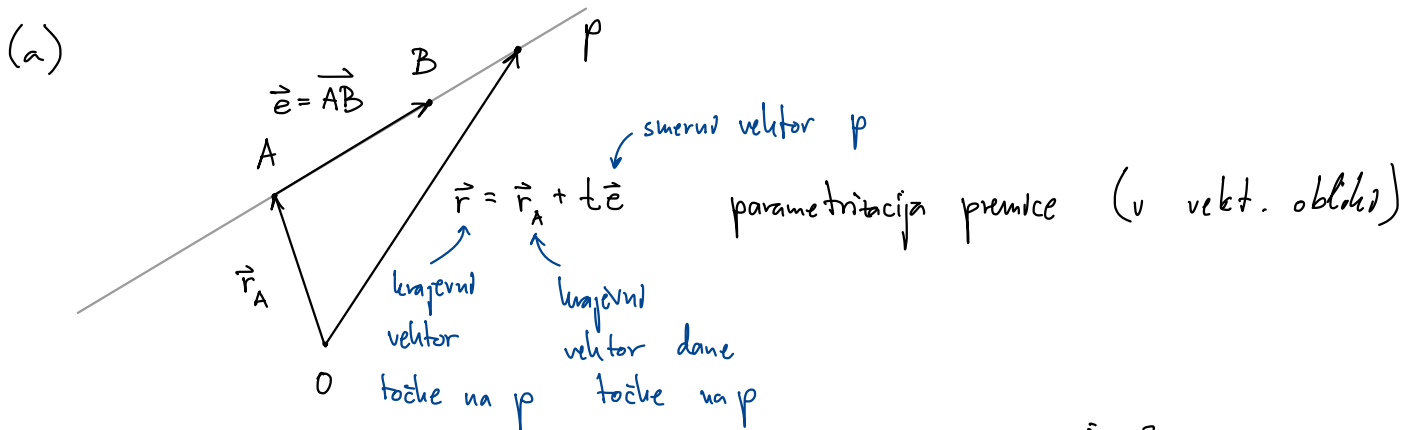


Matematika VSP, vaje, 29.12.2021 (10¹⁵ - 12⁰⁰, P12)

1. Dane so točke $A(3,2,0)$, $B(2,1,2)$ in $C(4,1,6)$.

- Določi premico p skozi točki A in B . Njeno enačbo zapiši v vseh treh oblikah.
- Ali so točke A , B in C kolinearne?
- Poišči točko D na premici p , tako da bo vektor \overrightarrow{CD} pravokoten na p . Nato določi razdaljo med točko C in premico p .
- Poišči zrcalno sliko C' pri zrcaljenju točke C čez premico p .
- Poišči točki P, Q na premici p , tako da bo $CPC'Q$ kvadrat.



V našem primeru je $\vec{r}_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

torej: $p: \vec{r} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (v vekt. obliki)

Po komponentah: $\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \dots \left. \begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{array} \right\} (*)$

Iz (*) izpostavimo t : $t = 3 - x$
 $t = 2 - y$, torej $3 - x = 2 - y = \frac{z}{2}$ (kanonična enačba p)
 $t = \frac{z}{2}$

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-0}{2}$$

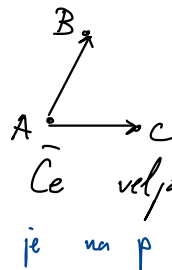
(b) Ali A, B, C ležijo na isti premici?

Če C leži na p (premici skozi A in B) potem je

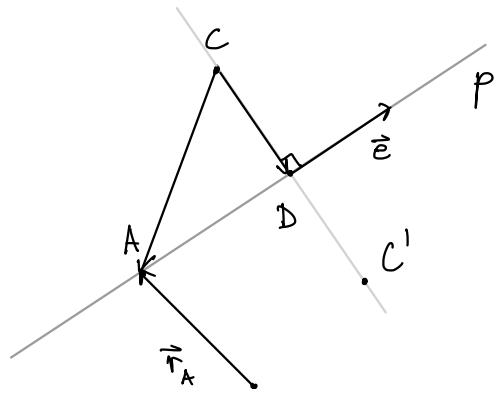
$$\vec{r}_C = \vec{r}_A + t\vec{e} \dots \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \dots \begin{array}{l} 4 = 3 - t \dots t = -1, \\ 1 = 2 - t \dots \text{vendar ta ne} \\ 6 = 2t \dots \text{ustreza 2. enačbi} \end{array}$$

Torej C ne leži na p .

Še direktno, Ali velja $\vec{AB} \times \vec{AC} = \vec{0}$? Če velja, so A, B, C kolinearne... SAMOSTOJNO.



(c)



$$\vec{CD} = \vec{r}_D - \vec{r}_C = (\vec{r}_A + t\vec{e}) - \vec{r}_C$$

$$\vec{CD} \perp \vec{e} \dots \vec{CD} \cdot \vec{e} = 0$$

$$(\vec{r}_A + t\vec{e} - \vec{r}_C) \cdot \vec{e} = 0$$

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_C) \cdot \vec{e} + t\vec{e} \cdot \vec{e} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$12 + t \cdot 6 = 0 \dots t = -\frac{12}{6} = -2$$

Torej $\vec{r}_D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

in zato $D(5, 4, -4)$.

Drugače: $\vec{CA} - \text{proj}_{\vec{e}} \vec{CA} = \vec{CA} - \frac{\vec{CA} \cdot \vec{e}}{\vec{e} \cdot \vec{e}} \vec{e} \dots \text{SAMOSTOJNO!}$

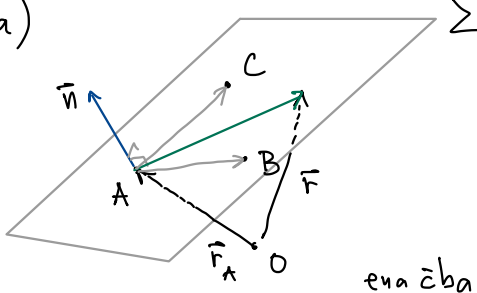
Razdalja med C in p:

$$d(C, p) = d(C, D) = \|\vec{CD}\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 9 + 100} = \sqrt{110}$$

(d) $\vec{r}_{C'} = \vec{r}_C + \vec{CD} + \underbrace{\vec{DC'}}_{\vec{CD}} = \vec{r}_C + 2\vec{CD} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -14 \end{bmatrix} \dots C'(6, 7, -14)$

2. Dane so točke $A(2, -3, 6)$, $B(-4, -1, 6)$, $C(2, -1, 9)$ in $D(1, 2, -1)$

- (a) Poišči enačbo ravnine Σ , ki gre skozi točke A , B in C .
 (b) Poišči enačbo premice p , ki gre skozi D in je pravokotna na ravnino Σ .
 (c) Izračunaj presečišče premice p in ravnine Σ .

(a)  Za opis ravnine potrebujemo točko na Σ in njen normalni vektor.

$$\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_A) \dots \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r}_A \iff \vec{n} \cdot \vec{r} - \vec{n} \cdot \vec{r}_A = 0$$

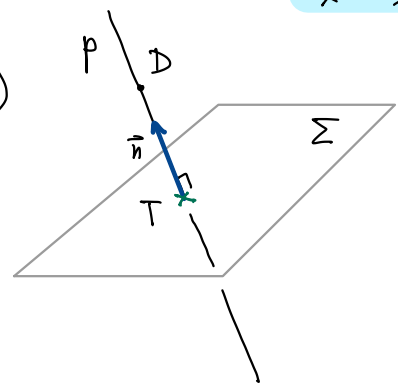
enačba ravnine $\rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r} = d \dots \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = d \dots ax + by + cz = d$

$$\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ vzamemo } \vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\Sigma: 1 \cdot x + 3y - 2z = -19$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -19$$

$x + 3y - 2z = -19$

(b)  Kanonična enačba $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-(-1)}{-2}$

$$\vec{r} = \vec{r}_D + t\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$p: x-1 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{2}$$

(c) $p: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+3t \\ z = -1-2t \end{cases}$ to vstavimo v en. Σ :

$$(1+t) + 3(2+3t) - 2(-1-2t) = 19$$

$$14t + 9 = 19 \dots t = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \quad (\text{poiskali smo } t, \text{ pri katerem } p \text{ seka } \Sigma)$$

Koordinate presečišča so:

$$x = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$$

$$y = 2 + 3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{29}{7}$$

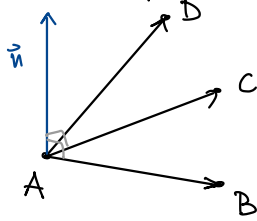
$$z = -1 - 2 \cdot \frac{5}{7} = -\frac{17}{7}$$

$T\left(\frac{12}{7}, \frac{29}{7}, -\frac{17}{7}\right)$
 ↑
 presečišče p in Σ .

3. Dane so točke $A(1, 0, -3)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(3, 2, 0)$ in $D(4, 2, -2)$.

- (a) Prepričaj se, da vse štiri ležijo na isti ravnini. Poišči še enačbo te ravnine.
 (b) Naj bo p premica, ki gre skozi A in B , q pa premica, ki gre skozi C in D . Zakaj se ti dve premici sekata? Kolikšen je kot med njima?

(a) Kako preverimo, da 4 dane točke ležijo na isti ravnini?



$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0 \leftarrow \begin{array}{l} \text{če to velja,} \\ A, B, C \text{ in } D \text{ ležijo na} \\ \text{isti ravnini} \end{array}$$

miesani produkt \vec{AB} , \vec{AC} in \vec{AD}

Poiščimo kar takoj enačbo ravnine skozi A, B in C :

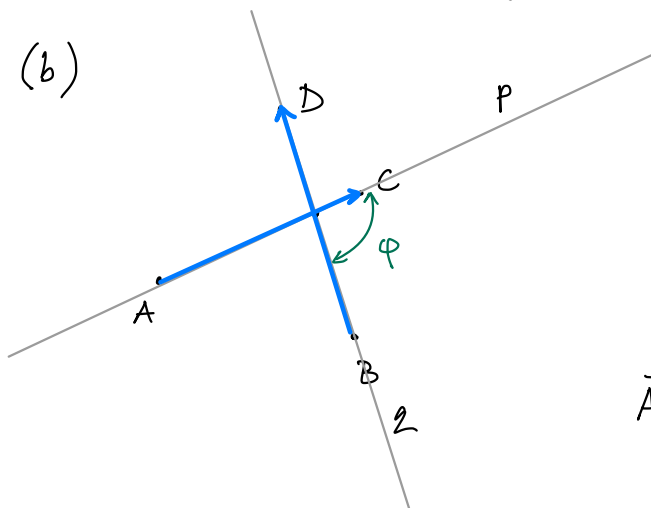
$$\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \\ -4 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ vzemimo } \vec{n} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enačba ravnine Σ : $4x - 7y + 2z = -2$
 $4 \cdot 1 - 7 \cdot 0 + 2 \cdot (-3)$

Preverimo, da tudi D leži na Σ :

Koordinate D vstavimo v en. te ravnine: $4 \cdot 4 - 7 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) = -2$. ✓

(b)

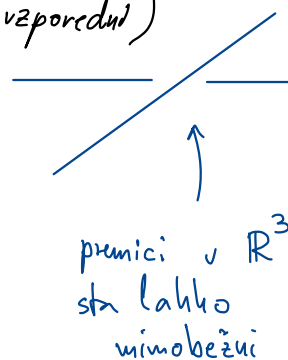


p in q se sekata, ker ležita na isti ravnini (in nista vzporedni)

φ je kot med

\vec{AC} in \vec{BD} :

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{BD} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



$$\cos \varphi = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{BD}}{\|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{BD}\|} = \frac{5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{38}} = \frac{5}{\sqrt{646}} \dots \varphi = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{646}}\right) = 1.37 = 78.66^\circ$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{17}, \quad \|\vec{BD}\| = \sqrt{38}$$