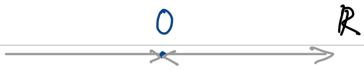
Matematika VSP, vaje, 18. 11. 2021 (9.15 – 11.00, P18)

1. Skiciraj grafe in poišči definicijska območja funkcij s spodnjimi predpisi. Katera od teh funkcij je soda oz. liha? Katera od funkcij je injektivna/surjektivna? Zakaj je oz. zakaj ni?

(a) $x^3 - 12x + 16$,	(e) $\log(x+2)$,
(b) $\dfrac{x^2-9}{x^2}$,	(f) $\sin(2x)$,
(c) $\dfrac{x^3+2x^2-8x}{x^2-1}$,	(g) $\lvert 2\cos(3x) - 2\rvert$,
(d) $e^x + 2$,	(h) $-\tan(x - \frac{\pi}{2})$,
	(i) $\lvert \arctan(x-1) + \frac{\pi}{2}\rvert$.

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2} = \dfrac{x^2}{x^2} - \dfrac{9}{x^2} = 1 - \dfrac{9}{x^2}$

Kaj je D_f?



f ni definirana, če $x^2 = 0$ oz. $x = 0$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Kaj je $Z_f = \{f(x) : x \in D_f\}$?

$f(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$. $x^2 > 0$ za $x \in D_f$, torej $\frac{9}{x^2} > 0$, zato $-\frac{9}{x^2} < 0$,

končno $1 - \frac{9}{x^2} < 1$, zato je $Z_f = (-\infty, 1)$.

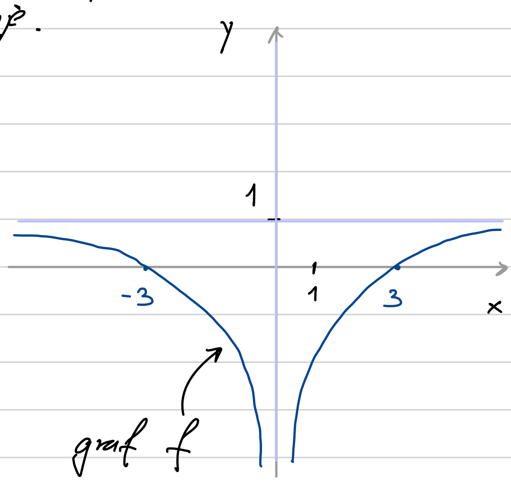
Kaj so ničle f? $f(x) = 0$ ... $\frac{x^2-9}{x^2} = 0 \;/\cdot x^2$ ... $x^2 - 9 = 0$ ... $\underline{x = \pm 3}$

to sta ničli f.

Ta f ima pol pri $x = 0$, to je navpična asimptota, ki je ravno y-os. To je pol sode stopnje.

Ali ima f tudi vodoravno asimptoto?

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ -\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\infty \\ -\infty}} \frac{(x^2-9)\cdot\frac{1}{x^2}}{x^2\cdot\frac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to\infty \\ -\infty}} \frac{1 - \boxed{\frac{9}{x^2}}^{\to 0}}{1} = \frac{1}{1} = 1,$$



Vodoravna asimptota je premica z en. $y = 1$.

(c) $g(x) = \dfrac{x^3+2x^2-8x}{x^2-1}$.

- poli: $x^2-1=0 \dots (x-1)(x+1)=0 \dots \underline{x_{1,2}=\pm 1}$
- ničle: $x^3+2x^2-8x=0 \dots x(x^2+2x-8)=0 \dots x(x+4)(x-2)=0$

$$\underline{x_3=0,\ x_4=-4,\ x_5=2}$$

- Ali ima g še kakšno asimptoto?

$$(x^3+2x^2-8x):(x^2-1) = \underline{x+2} + \frac{-7x+2}{x^2-1} = g(x)$$

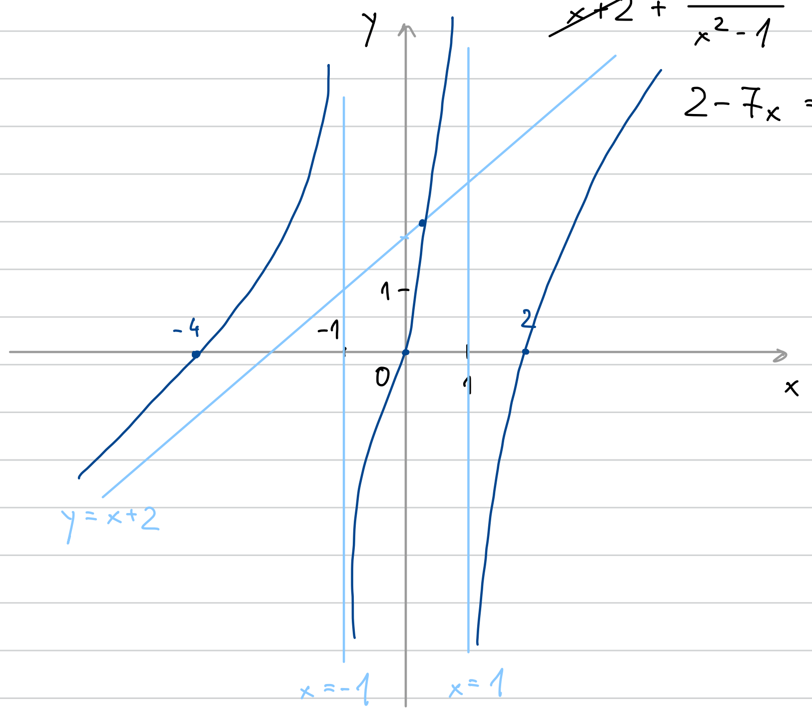
$$\begin{array}{l} x^3 - x \\ \hline 2x^2-7x \\ 2x^2-2 \\ \hline -7x+2 \end{array}$$

↑ to je še asimptota za g, $\underline{y=x+2}$

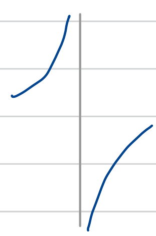
- Kje so presečišča z asimptoto? $g(x)=x+2$

$$\cancel{x+2} + \frac{2-7x}{x^2-1} = \cancel{x+2} \quad / \cdot (x^2-1)$$

$$2-7x=0 \dots \underline{x=\frac{2}{7}}.$$



Pola sta lihe stopnje ...



kandidati za racionalne ničle so $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

(a) $p(x) = x^3 - 12x + 16$

Ničle $p(x)$: Opazimo, da je $x = 2$ ničla, saj $2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0$.

$(x^3 - 12x + 16) : (x-2) = x^2 + 2x - 8$ ...

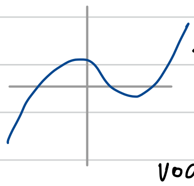
$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 \\ \hline \quad 2x^2 - 12x + 16 \\ \quad 2x^2 - 4x \\ \hline \qquad\quad -8x + 16 \\ \qquad\quad -8x + 16 \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

... torej $p(x) = (x-2)(x^2+2x-8) =$

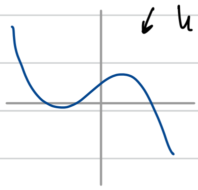
$= (x-2)(x+4)(x-2) = 0$

$\underline{x_{1,2} = 2, \quad x_3 = -4}$ to so ničle $p(x)$.

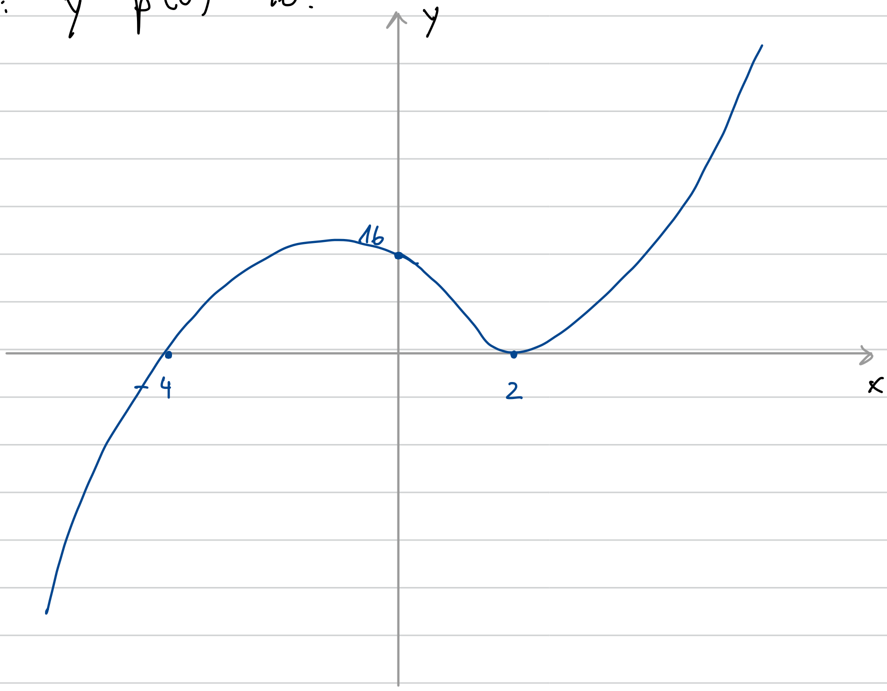
Začetna vrednost: $y = p(0) = 16$.



vodilni koef. > 0



vodilni koef < 0

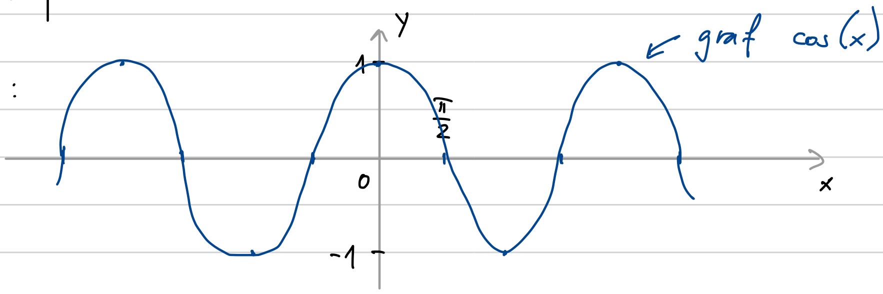


(g) $h(x) = |2\cos(3x) - 2|$

Začnimo s $\cos(x)$:

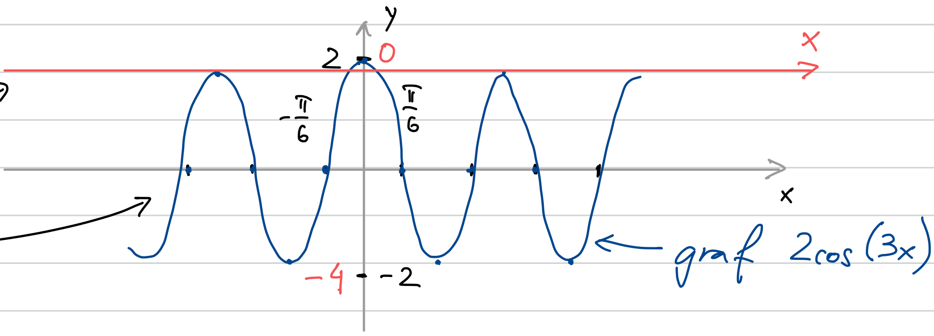
$\cos(x) = 0$ ..

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

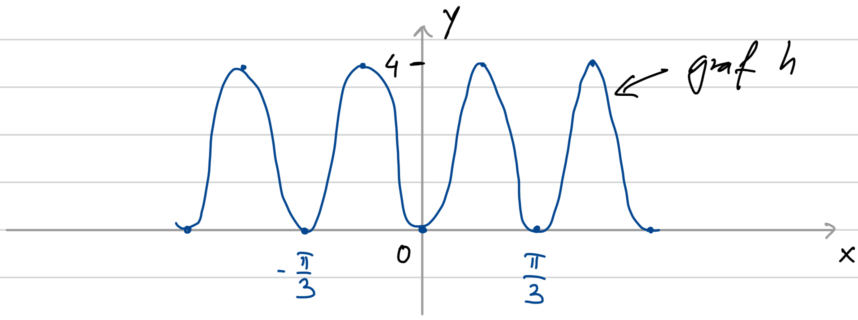


Kaj pa $\cos(3x)$? $\cos(3x) = 0 \dots 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \dots x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

glede na to "x-os" je to graf $2\cos(3x) - 2$



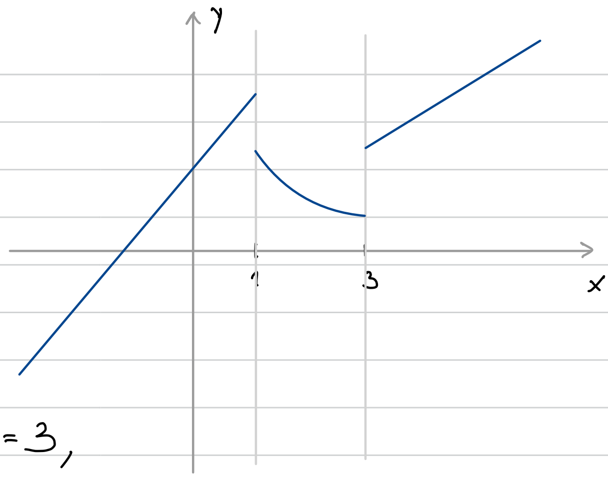
Končno: prezrcalimo zgornjo sliko preko x-osi.



2. Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \le 1 \\ x^2 - ax + b, & 1 \le x \le 3 \\ ax, & x \ge 3 \end{cases}$$

zvezna.



f mogoče ni zvezna pri $x = 1$ in $x = 3$, vsaj ne za poljubne a in b.

f je zvezna pri x_0, če velja $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

V našem primeru: • $x = 1$: $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \lim_{x \nearrow 1} (2x + a) = 2 \cdot 1 + a = 2 + a$

$\lim_{x \searrow 1} f(x) = \lim_{x \searrow 1} (x^2 - ax + b) = 1 - a + b$,

torej $2 + a = 1 - a + b$.

• $x = 3$: na levi vstavimo 3 v $x^2 - ax + b$, dobimo $9 - 3a + b$, na desni vstavimo 3 v ax, dobimo $3a$,

torej $9 - 3a + b = 3a$.

Rešimo sistem teh enačb:

$$\left.\begin{aligned} 2a - b &= -1 \\ -6a + b &= -9 \end{aligned}\right\} +$$

$$-4a = -10 \quad \ldots \quad a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

zato $2 \cdot \frac{5}{2} - b = -1$ ... $b = 6$

za ti dve vrednosti bo f zvezna.

3. Določi konstanti a in b tako, da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x) & x > 1. \end{cases}$$

Problematični sta $x = 0$ in $x = 1$.

Pri $x = 1$:
- na levi dobimo $a + b$
- na desni dobimo $2e^{1-1} - \cos(\pi) = 3$

$a + b = 3$

Pri $x = 0$:
- na desni dobimo $a \cdot 0 + b = b$
- na levi dobimo $\cancel{\frac{\sin(3 \cdot 0) \cdot (0-2)}{0}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x-2) \cdot \sin(3x)}{x} = (0-2) \cdot 3 = -6$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(dx)}{x} = d$$

$b = -6$, to vstavimo v

$a - 6 = 3 \therefore \underline{a = 9}.$

Za $a = 9$ in $b = -6$ bo ta funkcija zvezna.