Interpolacijska ploskev

Recimo, da imamo podane vrednosti neke funkcije dveh spremenljivk na $m \times n$ enakomerni mreži točk (x_i, y_j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ v ravnini. Te vrednosti lahko predstavljajo recimo višino terena, če imamo zemljivid pokrajine, meritve neke količine, ki je razporejena po nekem področju, ali barvo (oz. posamezno rgb komponento barve) *piksla* na sliki. Pogost problem je interpolacija vmesnih vrednosti te funkcije na ostalih točkah v pravokotniku, ki ga določa ta mreža znanih vrednosti. Načinov, da določimo interpolacijske ploskev je veliko, odvisno od problema. Tako kot pri problemu interpolacijskih krivulj, je pogosto primerna rešitev zlepek interpolacijskih ploskev. Če hočemo na ta način recimo povečati resolucij, bomo dosegli boljši učinek, če zahtevamo *gladkost* interpolacijske ploskve. Če hočemo narisati zemljevid pokrajine z grafičnimi algoritmi, ki omogočajo učinke kot so senčenje, in nočemo videti robov, kjer so ploskve zlepljene, moramo celo zahtevati *dvakrat gladko* interpolacijsko ploskev, torej funkcijo dveh spremenljivk, ki je dvakrat zvezno odvedljiva.

Opis naloge

Naloga je, da za dane podatke $u_{i,j} := u(x_i, y_j)$ na mreži točk implementirate C^2 polinomsko interpolacijsko funkcijo $u(x, y)$ na pravokotniku $[x_1, x_m] \times [y_1, y_n]$. Razdelimo postopek na dva dela.

1. Ker nimamo podanih vrednosti odvodov v točkah (x_i, y_j), jih moramo v teh točkah smiselno določiti s pomočjo vrednosti $u_{i,j}$. Prva odvoda u_x in u_y lahko določimo po formulah

$$\begin{aligned} u_x(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \\ u_y(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, \end{aligned}$$

   kjer je h razdalja med sosednjima točkama v mreži.
   Druge odvode lahko izračunamo po formulah

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \\ u_{yy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ u_{xy}(x_i, y_j) &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

2. Recimo, da imamo dane vrednosti funkcije in njenih odvodov na točkah mreže. Osredotočimo se na določanje interpolacijske funkcije na posameznem kvadratu. Predpostavimo, da imamo opravka s kvadratom $[0, 1] \times$

$[0,1]$. Zaradi enostavnosti in učinkovitosti celo priporačamo, da vsak kvadrat najprej s pomočjo translacije in raztega prestavimo na enotski kvadrat. Skupaj imamo na tem kvadratu 24 podatkov (v vsaki robni točki $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ in $(1,1)$ imamo vrednost funkcije, vrednosti parcialnih odvodov u_x ter u_y in vrednosti dvakratnih parcialnih odvodov u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}). Za točko $(0,0)$ lahko definiramo funkcijo, ki ima predpisane odvode v tisti točki, in ima obliko

$$f_{00}(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f.$$

Vprašanje: Kakšna je zveza med koeficienti a, b, c, d, e, f v definiciji funkcije f_{00} in vrednostmi funkcije f_{00} in njenih odvodov v točki $(0,0)$, torej $f_{00}(0,0)$, $f_{00,x}(0,0)$, $f_{00,y}(0,0)$, $f_{00,xx}(0,0)$, $f_{00,yy}(0,0)$, $f_{00,xy}(0,0)$?

Na podoben način lahko za vsako oglišče kvadrata $(1,0)$, $(0,1)$ in $(1,1)$ definiramo funkcje f_{10}, f_{01} in f_{11}, ki imajo predpisane vrednosti in vrednosti odvodov v ogliščih. Interpolacijsko funkcijo lahko potem definiramo kot uteženo vsoto teh osnovnih funkcij oblike

$$\begin{aligned} u(x,y) &= f_{00}(x,y)q(x)q(y) + f_{10}(x,y)q(1-x)q(y) \\ &\quad + f_{01}(x,y)q(x)q(1-y) + f_{11}(x,y)q(1-x)q(1-y). \end{aligned}$$

Določitev primerne uteži $q(x)$ je del naloge!
Pogoji, ki jih mora funkcija $q(x)$ izpolniti, da tako definirana interpolacijska funkcija $u(x,y)$ res dvakrat zvezno odvedljiva in imela predpisane odvode v robnih točkah so:

(a) Vrednosti na robu intervala $[0,1]$ morajo biti

$$\begin{aligned} q(0) &= 1 \\ q(1) &= 0 \\ q'(0) &= 0 \\ q'(1) &= 0 \\ q''(0) &= 0 \\ q''(1) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Zaželjeno je, da je utež simetrična v smislu

$$q(1-x) = 1 - q(x).$$

(c) Utežne funkcije v definiciji funkcije $u(x,y)$ morajo predstavljati t.i. *razčlenitev enote*:

$$q(x)q(y) + q(1-x)q(y) + q(x)q(1-y) + q(1-x)q(1-y) = 1.$$

Ta lastnost je zaželjena, zato da bo recimo v primeru konstantnih podatkov postopek vrnil konstantno interpolacijsko funkcijo.

$q(x)$ lahko določite tako, da najdete polinom pete stopnje, ki izpolnjuje pogoje iz (a) točke teh zahtev.

Poročilo naloge mora vsebovati teoretični del, ki vsebuje

1. Dokaz trditve, da ima funkcija $u(x, y)$, ki smo jo zgoraj definirali, v robnih točkah $(1, 0)$, $(0, 1)$ in $(1, 1)$ iste vrednosti in vrednosti odvodov kot funkcije f_{00}, f_{10}, f_{01} in f_{11} v ustreznih vogalnih točkah. (Dovolj je to dokazati za eno izmed teh točk na vogalu).

2. Dokaz, da polinom pete stopnje $q(x)$, ki ste ga določili iz pogojev v točki (a) zgoraj, avtomatsko tudi izpolni pogoje (b) in (c).

Spodaj je narisan primer takšne funkcije na kvadratu $[0, 1] \times [0, 1]$.