Presek dveh implicitno danih ploskev

Ploskev v $\mathbb{R}^3$ lahko opišemo kot rešitev enačbe $f(\mathbf{x}) = 0$, kjer je $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^3$, f pa funkcija treh spremenljivk. Recimo, da imamo dve ploskvi, opisani z enačbama $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Presek ploskev je množica rešitev nelinearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Če sta f_1 in f_2 gladki funkciji in so izpolnjeni še nekateri pogoji, je presek teh dveh ploskev gladka krivulja K. Namen naloge je poiskati to krivuljo.

Konstrukcija krivulje K

Enačbi $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$ lahko gledamo tudi kot enačbi nivojnic funkcij f_1 in f_2, krivulja K pa je presek teh nivojnic. Gradienta funkcij f_1 in f_2 sta v vsaki točki krivulje K torej pravokotna na K. To pomeni, da je $(\operatorname{grad} f_1) \times (\operatorname{grad} f_2)$ vektor, ki je tangenten na K. Pišimo

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))}{\|(\operatorname{grad} f_1(\mathbf{x})) \times (\operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}))\|}.$$

S tem predpisom je opisana vektorska funkcija $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Recimo, da začnemo z $\mathbf{x}_0 \in K$, tj. $f_1(\mathbf{x}) = 0$ in $f_2(\mathbf{x}) = 0$. Iz $\mathbf{x}_0$ se premaknemo za majhen korak dolžine $h > 0$ v smeri tangentega vektorja na K v novo točko $\mathbf{y}$. Glede na definicijo $\mathbf{F}$, to pomeni $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$, saj je $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| = 1$. Ta $\mathbf{y}$ *ne leži* (nujno) na krivulji K, leži pa blizu K (ker smo izbrali majhnen h). Če označimo $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{y})$, potem je $\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{y}$ enačba ravnine, ki je blizu normalni ravnini na krivuljo K. Da iz $\mathbf{y}$ dobimo $\mathbf{x}_1$, ki dejansko leži na krivulji K, sedaj rešimo sistem nelinearnih enačb (z neznanko $\mathbf{x}$)

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 0, \\ f_2(\mathbf{x}) &= 0, \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Rešitev $\mathbf{x}_1$ tega sistema poiščemo z Newtonovo metodo z začetnim približkom $\mathbf{y}$. Pričakujemo seveda, da je $\mathbf{x}_1$ blizu $\mathbf{y}$. (Če ni, smo izbrali prevelik h.)

Strnimo konstrukcijo zaporednih točk na krivulji K:

(i) Iz $\mathbf{x}_0 \in K$ s premikom za korak h v smeri $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ dobimo vmesni približek $\mathbf{y}$,

(ii) nato iz sistema (1) dobimo novo točko $\mathbf{x}_1 \in K$.

Postopek ponovimo za $\mathbf{x}_1$ in (spet preko vmesnega približka in sistema (1)) dobimo $\mathbf{x}_2 \in K$ itn. Dobimo torej zaporedje krajevnih vektorjev točk

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n,$$

ki opisujejo krivuljo K.

Manjša težava pri smiselnosti tega postopka: V praksi ne poznamo točke $\mathbf{x}_0 \in K$, s katero bi začeli, ampak poznamo le približek $\mathbf{y}$ za ta $\mathbf{x}_0$. Tega ni težko odpraviti: Če rešimo sistem (1) s tem približkom, dobimo $\mathbf{x}_0 \in K$ in lahko uporabimo opisani postopek.

Naloga

1. Zapiši pripadajočo vektorsko funkcijo $\mathbf{G}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ter njeno Jacobijevo matriko $J\mathbf{G}$ za sistem (1). (Oboje lahko seveda izraziš z f_i, $\operatorname{grad} f_i$ ter $\mathbf{y}$ in $\mathbf{v}$.)

2. Napiši `octave` funkcijo

   ```
   X = presekPloskev(f1, gradf1, f2, gradf2, X0, h, n, tol, maxit),
   ```

   ki za:

   - funkciji $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funkciji vektorskega argumenta $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,
   - gradienta $\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, vektorski funkciji $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
   - približek za začetno točko na krivulji `X0` (tega je treba najprej 'popraviti' s sistemom (1)),
   - dolžino koraka `h`,
   - število `n` zaporednih točk na krivulji, ki naj jih poiščemo,
   - toleranco `tol` za Newtonovo metodo in
   - največje dovoljeno število iteracij `maxit` za Newtonovo metodo

   vrne $3 \times (n+1)$ matriko `X`, katere stolpci so krajevni vektorji zaporednih točk na K, tj. $X = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]$. *Drži se specifikacij!*

Oddaja naloge

Na spletno učilnico oddaj naslednje:

1. datoteko **presekPloskev.m**, ki naj vsebuje *komentarje* **in** *test(e)*,

2. datoteko (poročilo) **solution.pdf**, ki vsebuje izpeljavo rešitve in odgovore na vprašanja.

S kolegi se lahko posvetuješ in lahko tudi skupaj rešujete nalogo, vendar moraš program in poročilo izdelati sam. Uporabljaš lahko vse `octave` funkcije, ki smo jih izdelali na vajah.

Dodatna naloga

Opisani postopek je v resnici Eulerjeva metoda za reševanje sistema diferencialnih enačb. Naravna parametrizacija $\mathbf{x}(t)$ za K je namreč rešitev avtonomnega sistema diferencialnih enačb

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Če za začetni pogoj vzamemo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, kjer je $\mathbf{x}_0$ na K, je rešitev ravno naravna parametrizacija za krivuljo K.

Uporabi en korak Runge–Kutta metode 4. reda s korakom $h > 0$ za iskanje vmesnega približka $\mathbf{y}$, iz katerega nato iz sistema (1) dobiš naslednjo točko na krivulji K. Napiši `octave` funkcijo

```
X = presekPloskevRK4(f1, gradf1, f2, gradf2, X0, h, n, tol, maxit),
```

ki uporablja enake argumente in vrnjene vrednosti kot funkcija `presekPloskev`, vendar uporablja Runge–Kutta metodo 4. reda (namesto Eulerjeve metode) za iskanje vmesnih približkov. Primerjaj delovanje obeh funkcij.