Algoritmi in podatkovne strukture 2

Algorithms and Data Structures 2

Borut Robič

Faculty of Computer and Information Science
University of Ljubljana

Predavanja

- Predavanja v slovenščini
- Vaje v slovenščini:
  - Začetek: v tednu 28.februar – 4.marec
  - doc. Uroš Čibej
  - As. Rok Gomiščček
- Info:
  - e-Učilnica FRI

Literatura

- *Te prosojnice* (po spodnji literaturi)
- B. Robič *Algoritmi*, Založba FRI (izide v 1-2 mesecih)
- Dodatno (neobvezno):
  - Cormen et al.
  - Sedgewick et al.
  - Kleinberg & Tardos
  - Skiena
  - Sahni
  - ...

Vsebina ...

Uvod (osnovni pojmi)

Urejanje (navadno, spodnja meja čas.zaht., Heapsort)

Metode razvoja algoritmov (kratek pregled)

Deli in vladaj (Quicksort, Množenje števil, Matrično množenje, *k*-ti najmanjši el., DFT)

Dinamično programiranje (Fibonaccijeva števila, Pretoki, Nahrbtnik, Najcenejše poti)

Požrešnost (Zabojniki, Huffmanovo kodiranje, Razvrščanje opravil, Koši, Trgovski potnik)

Sestopanje (Labirint)

Razveji in omeji

Groba sila

Naravna inteligenca (Iskanje znakovnih podzaporedij)

Naključnost (Razpoznavanje praštevil)

I.
Uvod

1. Asimptotična notacija

Definicija. Naj bo dana funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Potem za $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pišemo

- $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, če $\exists c > 0$, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c$. f narašča **kvečjemu tako hitro** kot g.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, če $\exists c > 0$, da je $c \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$. f narašča **vsaj tako hitro** kot g.
- $f(n) = \Theta(g(n))$, če $\exists c_1, c_2 > 0$, da je $c_1 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c_2$. f narašča **podobno hitro** kot g.
- $f(n) = o(g(n))$, če je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$. f narašča **počasneje** od g.
- $f(n) = \omega(g(n))$, če je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$. f narašča **hitreje** od g.
- $f(n) \sim g(n)$, če je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. f narašča **tako hitro** kot g.

Simbole $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o, ω in $\sim$ bi lahko definirali na ekvivalenten način brez limit:

- $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, če $\exists c, n_0 > 0\ \forall n \geqslant n_0 : f(n) \leqslant cg(n)$.

  Intuitivno: za neko konstanto $c > 0$ je od nekega zadosti velikega argumenta n_0 dalje vrednost $f(n)$ navzgor omejena z vrednostjo $cg(n)$.

- $f(n) = \Omega(g(n))$, če $\exists c, n_0 > 0\ \forall n \geqslant n_0 : cg(n) \leqslant f(n)$.

  Intuitivno: za neko konstanto $c > 0$ je od nekega zadosti velikega argumenta n_0 dalje vrednost $f(n)$ navzdol omejena z vrednostjo $cg(n)$.

- $f(n) = \Theta(g(n))$, če $\exists c_1, c_2, n_0 > 0\ \forall n \geqslant n_0 : c_1 g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 g(n)$.

  Intuitivno: za neki konstanti $c_1, c_2 > 0$ je od nekega zadosti velikega argumenta n_0 dalje vrednost $f(n)$ omejena navzdol s $c_1 g(n)$ in navzgor s $c_2 g(n)$.

- $f(n) = o(g(n))$, če $\forall c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geqslant n_0 : f(n) < cg(n)$.

  Intuitivno: od nekega zadosti velikega argumenta n_0 dalje je vrednost $f(n)$ manjša od $g(n)$.

- $f(n) = \omega(g(n))$, če $\forall c > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geqslant n_0 : cg(n) < f(n)$.

  Intuitivno: od nekega zadosti velikega argumenta n_0 dalje je vrednost $f(n)$ večja od $g(n)$.

S pomočjo zgornjih definicij dokažemo osnovne lastnosti asimptotične notacije:

1. $f(n) = \Theta(g(n)) \implies g(n) = \Theta(f(n))$.
2. $f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
3. $c \neq 0$ konstanta $\implies \mathcal{O}(|c| \cdot g(n)) = \mathcal{O}(g(n))$.
4. $f(n) = \mathcal{O}(h(n)) \wedge g(n) = \mathcal{O}(k(n)) \implies f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max(h(n), k(n)))$.
5. $f(n) = \mathcal{O}(h(n)) \wedge g(n) = \mathcal{O}(k(n)) \implies f(n) \cdot g(n) = \mathcal{O}(h(n) \cdot k(n))$.
6. $f(n) \cdot \mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$.

Vaja. Poskusite dokazati. (Uporabite prejšnje definicije).

Te lastnosti uporabljamo pri razvoju izrazov z asimptotično notacijo. Kako? Izraz, v katerem nastopa leva stran L kake od spodnjih vrstic, lahko preoblikujemo v izraz, kjer je L zamenjana z desno stranjo D:

$$\begin{array}{rl} L & D \\ f(n) & \rightsquigarrow \mathcal{O}(f(n)) \\ c\cdot\mathcal{O}(f(n)) & \rightsquigarrow \mathcal{O}(f(n)) \\ \mathcal{O}(c\cdot f(n)) & \rightsquigarrow \mathcal{O}(f(n)) \\ f(n)-g(n)=\mathcal{O}(h(n)) & \rightsquigarrow f(n)=g(n)+\mathcal{O}(h(n)) \\ \mathcal{O}(f(n))\cdot\mathcal{O}(g(n)) & \rightsquigarrow \mathcal{O}(f(n)\cdot g(n)) \\ \mathcal{O}(f(n))+\mathcal{O}(g(n)) & \rightsquigarrow \mathcal{O}(g(n)), \text{ če je } f(n)=\mathcal{O}(g(n)). \end{array}$$

Primer. Če bi za funkcijo $T(n)$ izračunali, da je $T(n)=2\log_3 n+4n+5n\log_6 n^7$, bi lahko z uporabo teh zamenjav ugotovili, da je $T(n)=\mathcal{O}(\log n)+\mathcal{O}(n)+\mathcal{O}(n\log n)$ in končno $T(n)=\mathcal{O}(n\log n)$. □

Problemi – algoritmi - zahtevnost

Računski problem je vsak problem, katerega reševanje zahteva kakršno koli obliko računanja, ki jo zmore izvesti Turingov stroj ali kak njemu ekvivalentni model računanja (kot npr. RAM).

Računski problem Π definiramo tako, da zanj relevantne **formalne parametre** povežemo v neko smiselno vprašanje.

Npr.: $\Pi \equiv$ *Ali graf* $G(V, A)$ *z dano množico vozlišč* V *in dano množico usmerjenih povezav* $A \subseteq V \times V$ *vsebuje Hamiltonov obhod?* V tej definiciji so formalni parametri V, A in $G(V, A)$.

Primerek (ali **nalogo)** π problema Π dobimo, ko v definiciji problema Π nadomestimo vse formalne parametre z **dejanskimi parametri.**

Npr.: $\pi \equiv$ *Ali graf* $G(V, E)$ *z dano množico vozlišč* $V = \{a, b, c, d\}$ *in dano množico povezav* $A = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$ *vsebuje Hamiltonov obhod?*

Šele ko je dan (*konkreten*) primerek problema se lahko začne računanje rešitve.
Primerki problema Π se razlikujejo v svojih dejanskih parametrih.
Za nas bo pomembneje, kako se razlikujejo v svoji velikosti.

Velikost primerka $\pi \in \Pi$ je dolžina besede $w(\pi)$, v kateri so kodirani dejanski parametri primerka π.

Predpostavka: kodirna abeceda ima vsaj dva znaka, kodiranje je brez redundanc.

Naša naloga: za dani računski problem Π sestaviti **algoritem** A, ki bo sposoben izračunati rešitev poljubnega primerka $\pi \in \Pi$.

Algoritem A bo imel **časovno zahtevnost** $T_A(n)$, če bo med reševanjem poljubnega primerka velikosti n opravil $T_A(n)$ korakov.

Funkcije $T_A(n)$ pogosto ne bomo znali/mogli/želeli natančno določiti, ker je spremenljiva (odvisna od arhitekture in tehnoloških lastnosti rač.). Zato bomo poskušali ugotoviti, kakšna je njena **hitrost naraščanja**.

Rekli bomo: Algoritem A ima časovno zahtevnost

- **kvečjemu** $\mathcal{O}(g(n))$, če bomo ugotovili: $T_A(n) = \mathcal{O}(g(n))$;
- **vsaj** $\Omega(h(n))$, če bomo ugotovili: $T_A(n) = \Omega(h(n))$; in
- $\Theta(k(n))$, če bomo ugotovili: $T_A(n) = \Omega(k(n))$ in $T_A(n) = \mathcal{O}(k(n))$.

Posebej bomo rekli, da je časovna zahtevnost algoritma A

- **konstantna**, če bo $T_A(n)$ konstantna funkcija: $T_A(n) = \mathcal{O}(1)$;
- **logaritmična**, če bo $T_A(n)$ logaritmična funkcija: $T_A(n) = \mathcal{O}(\log n)$;
- **polilogaritmična**, če bo $T_A(n)$ polilogaritmična funkcija: $T_A(n) = \text{poly}(\log n)$;
- **polinomska**, če bo $T_A(n)$ polinomska funkcija: $T_A(n) = \text{poly}(n)$;
- **kvazipolinomska**, če bo $T_A(n) = 2^{\text{poly}(\log n)}$;
- **subeksponentna**, če bo $T_A(n) = 2^{o(n)}$;
- **eksponentna**, če bo $T_A(n) = 2^{\text{poly}(n)}$.

Kvazipolinomski alg. je asimptotično počasnejši od vsakega polinomskega alg. (a hitrejši od vsakega exponentnega). Subeksponenti alg. je asimptotično hitrejši od vsakega eksponentnega alg. (a počasnejši od vsakega polinomskega).

Podobno bomo rekli, da ima algoritem A **prostorsko zahtevnost** $S_A(n)$, če bo med reševanjem poljubnega primerka velikosti n vsaj enkrat rabil $S_A(n)$ pomnilniških besed. Tudi pri $S_A(n)$ nas bo zanimalo asimptotično vedenje.

Funkcija $T_\Pi(n)$ bo **časovna zahtevnost problema** Π,
če bo za Π obstajal algoritem A s čas. zahtevnostjo $T_A(n) = T_\Pi(n)$.

Π bo imel asimptotično čas. zahtevnost reda $\mathcal{O}(g(n))$, $\Omega(h(n))$ ali $\Theta(k(n))$,
če bo za Π obstajal algoritem A s časovno zahtevnostjo $T_A(n)$,
ki je reda $\mathcal{O}(g(n))$, $\Omega(h(n))$ ali $\Theta(k(n))$.

Podobno definiramo **prostorsko zahtevnost** $S_\Pi(n)$ **problema**.

II.
Urejanje

2. Navadno urejanje

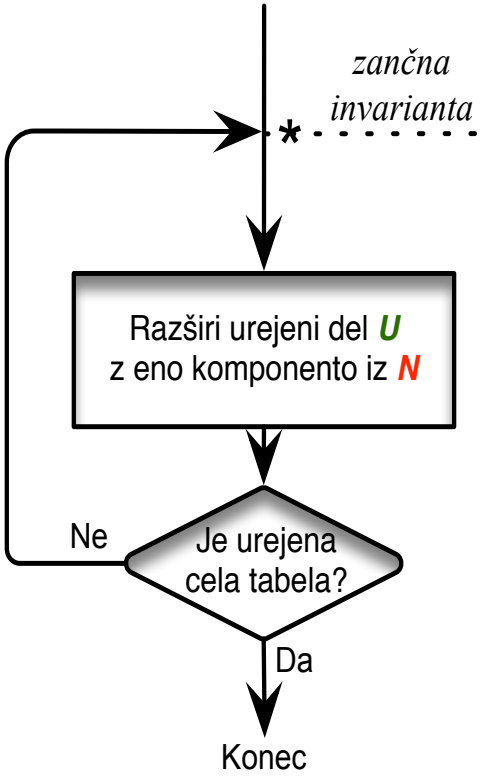
Problem. *Dana so števila* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqslant 1$.
Poišči razporeditev $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, *da bo* $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$.

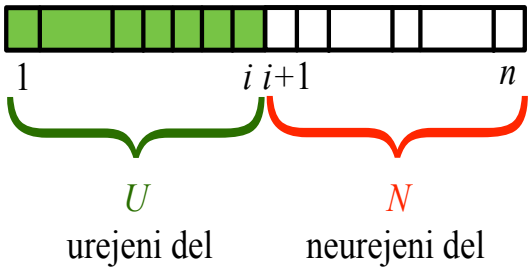
Primer. Za $a_1 = 5, a_2 = 9, a_3 = 7, a_4 = 2, a_5 = 8, a_6 = 1$ je iskana razporeditev a_6, a_4, a_1, a_3, a_5, a_2.

Za ta problema poznamo nekaj enostavnih, navadnih algoritmov, za katere velja

- vsi korakoma širijo trenutno urejeni del U tabele t (od začetnega $U = t[1]$ do končnega $U = t[1..n]$);
- razlikujejo se v načinu, kako razširijo $U = t[1..i]$ z elementom iz neurejenega dela $N = t[i+1..n]$.
- če razširitev $U = t[1..i]$ zahteva $R(i)$ časa, je čas. zahtevnost urejanja cele tabele $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} R(i)$.

Zgradba navadnih algoritmov urejanja.



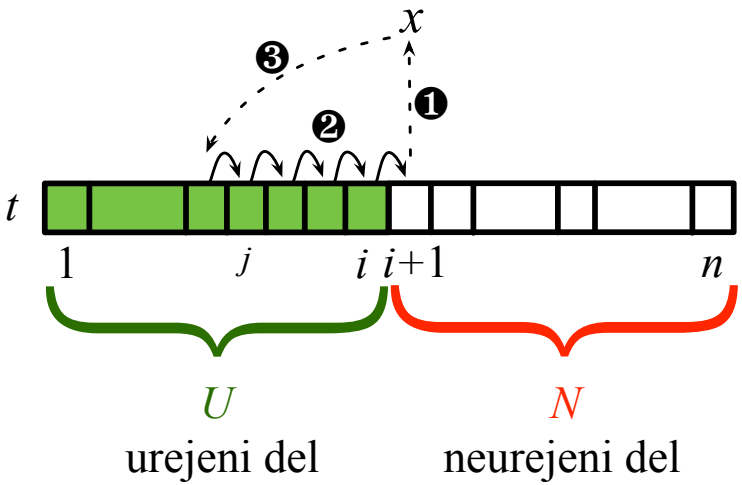


*Zančna invarianta je situacija, ki velja ob vsakem vstopu v točko * diagrama poteka.*

```
procedure NavadnoUrejanje(t);
begin
  for i:=1 to n-1 do
    Razsiri(t[1..i])
  endfor
end.
```

Navadni algoritmi na različne načine razširijo urejeni del $U = t[1 \ldots i]$, tj. implementirajo proceduro `Razsiri(t[1..i])`:

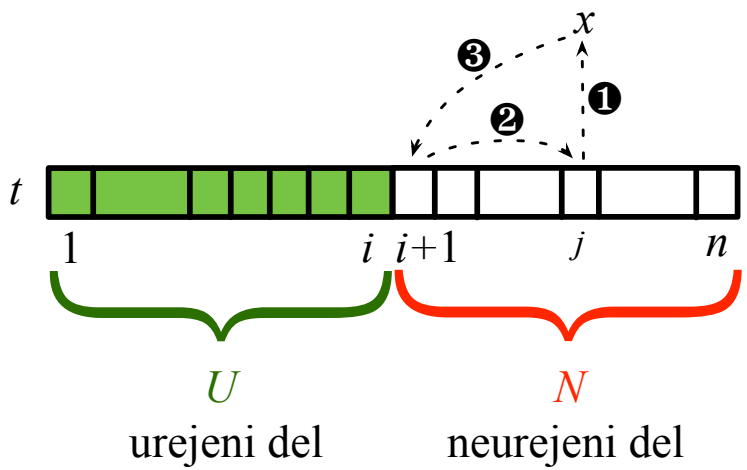
Razširitev z **vstavljanjem**: *prvi element v* N, $t[i+1]$, *se premesti (vrine) na ustrezno mesto v* $U = t[1..i]$.




```
procedure Vstavi&Razsiri(t[1..i]);
begin
  x:=t[i+1]; j:=i;
  while j>=1 and x<t[j] do
    t[j+1]:=t[j]; j--
  endwhile;
  t[j+1]:=x
end.
```

V najslabšem primeru je treba prestaviti i elementov v U; zato je $R(i) = \mathcal{O}(i)$.

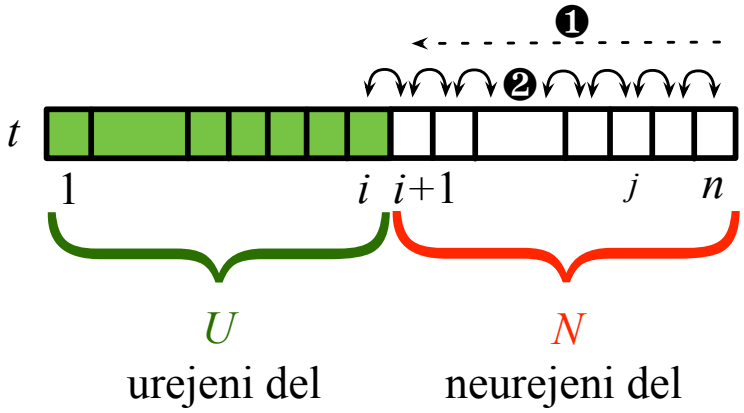
Razširitev z **izbiranjem**: *prvi element v N, $t[i+1]$, se zamenja z najmanjšim elementom v N.*




```
procedure Izberi&Razsiri(t[1..i]);
begin
  j := i+1;
  while j<=n do
    if t[j]<t[i+1] then
      x:=t[j]; t[j]:=t[i+1]; t[i+1]:=x
    endif;
    j++
  endwhile
end.
```

Da najdemo najmanjšega v N, je treba pregledati cel N; zato je $R(i) = \Theta(n-i)$.

Razširitev z **menjavanjem**: *med sprehodom po* N *od* $t[n]$ *do* $t[i+1]$ *se vsak* $t[j]$ $(i+1 \leqslant j \leqslant n))$ *zamenja s* $t[j-1]$, *če je* $t[j-1] > t[j]$.




```
procedure Menjaj&Razsiri(t[1..i]);
begin
  for j:= n downto i+1 do
    if t[j-1]>t[j] then
      x:=t[j-1]; t[j-1]:=t[j]; t[j]:=x
    endif
  endfor
end.
```

Med sprehodom po N se opravi $n-i$ primerjanj; zato je $R(i) = \Theta(n-i)$.

Ti trije načini širjenja $U[1..i]$ vodijo do treh navadnih algoritmov urejanja:

Navadno vstavljanje (InsertionSort):

```
procedure NavadnoVstavljanje(t);
begin
  for i:=1 to n-1 do
    Vstavi&Razsiri(t[1..i])
  endfor
end.
```

Časovna zahtevnost je $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} R(i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i i = c \sum_{i=1}^{n-1} i = c\frac{1}{2}(n-1)n = \mathcal{O}(n^2)$,
kjer so $c_i \in \mathbb{R}^+$ in $\min\limits_{1 \leqslant i < n} c_i \leqslant c \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i < n} c_i$.

Navadno izbiranje (SelectionSort):

```
procedure NavadnoIzbiranje(t);
begin
  for i:=1 to n-1 do
    Izberi&Razsiri(t[1..i])
  endfor
end.
```

Časovna zahtevnost je $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} R(i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(n-i) = c\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \mathcal{O}(n^2)$, kjer so $c_i \in \mathbb{R}^+$ in $\min\limits_{1 \leqslant i < n} c_i \leqslant c \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i < n} c_i$.

Navadno menjavanje (BubbleSort):

```
procedure NavadnoMenjavanje(t);
begin
  for i:=1 to n-1 do
    Menjaj&Razsiri(t[1..i])
  endfor
end.
```

Časovna zahtevnost je $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} R(i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i(n-i) = c\sum_{i=1}^{n-1}(n-i) = \mathcal{O}(n^2)$,
kjer so $c_i \in \mathbb{R}^+$ in $\min\limits_{1 \leqslant i < n} c_i \leqslant c \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i < n} c_i$.

Opisani algoritmi za urejanje n števil imajo časovne zahtevnosti reda $\mathcal{O}(n^2)$.

Zgornja meja $\mathcal{O}(n^2)$ pa je za vse te algoritme *tesna*: vsak jo pri nekih vhodnih podatkih doseže. (Razmislite pri katerih.)
Torej vsak od navadnih algoritmov v *najslabšem primeru* zahteva $\Theta(n^2)$ časa.

Sklep. *Navadni algoritmi urejanja n števil imajo časovno zahtevnost* $\Theta(n^2)$.

3. Spodnja meja časovne zahtevnosti urejenja

Vprašanje: Ali se da števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ urediti hitreje?

Vsak algoritem urejanja mora vsako od n števil *vsaj prebrati*; za to rabi $\Theta(n)$ časa. Sledi, da ima vsak algoritem urejanja n števil časovno zahtevnost $\Omega(n)$.

Vprašanje: Ali je $\Omega(n)$ *tesna* spodnja meja za čas. zaht. urejanja n števil? Vprašajmo drugače: Ali *obstaja* algoritem, ki uredi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v času $\Theta(n)$?

Odgovor na to bomo dobili v tem razdelku.

Kako do odgovora?

Pri navadnih algoritmih urejanja se poleg običajnih aritmetično-logičnih operacij pojavljata še dve operaciji: *primerjanje* števil a_i, a_j in *premestitev* števila a_i.

V nadaljevanju pa se bomo osredotočili le na operacijo primerjanja in ocenili, kolikokrat jo je treba izvesti med urejanjem $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Čemu ta omejitev?

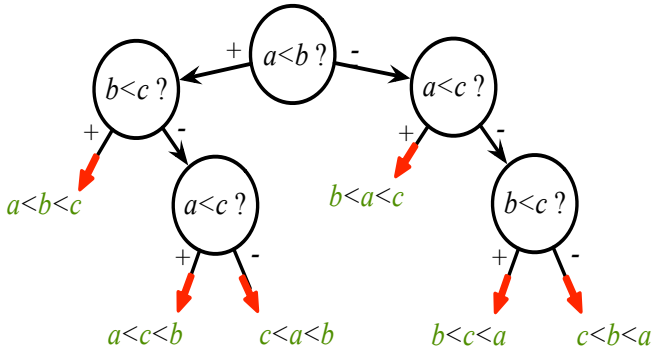
Naš namen je oceniti, *najmanj koliko primerjanj je potrebnih za ureditev števil* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *ne glede na algoritem urejanja.* Ker aritmetično-logičnih operacij in premestitev ne bomo šteli, bo ocena neka *spodnja meja za število vseh operacij*, ki jih mora izvesti *katerikoli znani ali še neznani algoritem urejanja.*

Odločitvena drevesa in urejanje

Kako bi uredili $a_1, a_2, \ldots, a_n$, če bi imeli na voljo le operacijo primerjanja a_i, a_j?

Algoritem, ki bi smel uporabiti le to operacijo, bi moral ugotoviti, kako so ta števila razvrščena z relacijo $\leqslant$, ne bi pa jih premestil na njihova prava mesta.

Algoritem, ki to zmore, se ravna po odločitvenem drevesu, ki ga lahko priredimo številom $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za motivacijo poglejmo primer, ko je $n = 3$.



Algoritem začne v korenu drevesa. Tam primerja a z b. Če je $a < b$, nadaljuje po povezavi + (,,da"), sicer pa po povezavi - (,,ne").

V vsakem vozlišču, ki ga doseže, primerja dve števili in odvisno od rezultata nadaljuje po povezavi + ali - .

To ponavlja, dokler ne vstopi v rdečo povezavo. Tam izve, da so a, b, c urejena tako, kot piše na koncu povezave.

Posplošitev

Zamisel posplošimo na pojubnih $n \geqslant 1$ števil.
Številom $a_1, a_2, \ldots, a_n$ priredimo dvojiško drevo T_n z naslednjimi lastnostmi:

(i) vsako notranje vozlišče vsebuje neko primerjanje $a_i < a_j$ $(i \neq j)$;

(ii) v listih so vse permutacije števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

(iii) permutacija $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ je v listu *če in samo če* $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$ izpolnjuje izide vseh primerjanj na veji do tega lista.

V splošnem lahko številom $a_1, a_2, \ldots, a_n$ priredimo več različnih dreves T_n. Oblika vsakega je odvisna od tega, kako so primerjanja prirejena notranjim vozliščem. Kljub razlikam v obliki pa mora imeti vsako od teh dreves $n!$ listov.

Teorijo grafov pravi:

Če je višina $h(T)$ drevesa T definirana kot število notranjih vozlišč na najdaljši veji drevesa T, potem za vsako dvojiško drevo T z ℓ listi velja $h(T) \geqslant \lceil \log_2 \ell \rceil$.

V našem primeru je $T = T_n$ in $\ell = n!$, zato velja $h(T_n) \geqslant \lceil \log_2 n! \rceil$.
Ugotovili smo: višina vsakega drevesa T_n je vsaj $\lceil \log_2 n! \rceil$.

Naš algoritem bo pri nekih podatkih $a_1, a_2, \ldots, a_n$ izvedel (vzdolž neke veje) *vsaj* $\lceil \log_2 n! \rceil$ primerjanj, da bo ugotovil, kako so podatki razvrščeni po velikosti. Poglejmo, koliko je $\lceil \log_2 n! \rceil$:

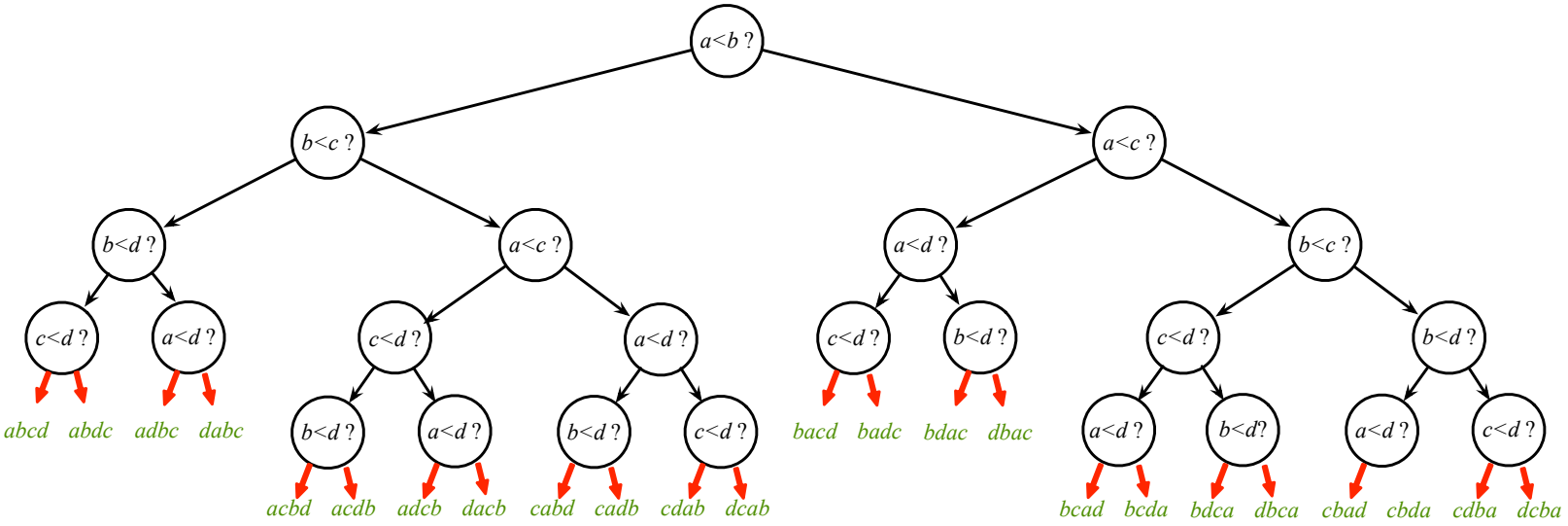
$$\lceil \log_2 n! \rceil \geqslant \log_2 n! \approx /\!/ \text{ Stirlingov obrazec: } n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n /\!/ \approx \log_2 \left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 \pi + \frac{1}{2}\log_2 n + n\log_2 n - n\log_2 e =$$

$$= n\log_2 n - c_1 n + c_2 \log_2 n + c_3 \geqslant c\, n \log n = \Omega(n \log n) \,/\!/ \text{ kjer so } c_1, c_2, c_3, c \in \mathbb{R}^+ /\!/.$$

Sklep. *Vsak algoritem urejanja, ki uporablja operacijo primerjanja dveh števil, zahteva za ureditev vsaj enega zaporedja n števil $\Omega(n \log n)$ operacij primerjanja.*

Primer. Drevo T_4.



4. Heapsort – Urejanje s kopico

Videli smo, da ni algoritma urejanja, ki bi uporabljal operacijo primerjanja in bil asimptotično hitrejši od $\Omega(n \log n)$.

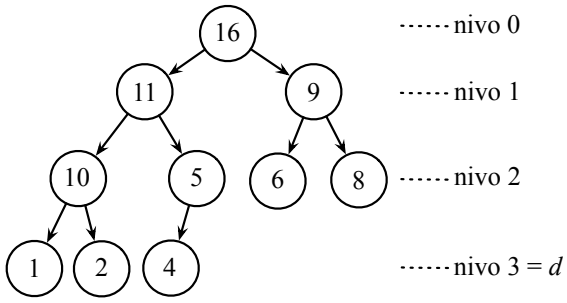
Zdaj se seveda vprašamo, ali morda obstaja algoritem, ki uporablja operacijo primerjanja in doseže najmanjšo možno časovno zahtevnost $\Theta(n \log n)$?

Odgovor je *da*; tak algoritem bomo opisali v tem razdelku. Uporabljal bo podatkovno strukturo, imenovano *kopica*.

Definicija. **Kopica** števil $s_1, \ldots, s_n$ je dvojiško drevo $T(V, E)$ z lastnostmi:

- $V = \{s_1, \ldots, s_n\}$ je množica vozlišč;
- če ima vozlišče s_i sina s_j, je $s_i \geqslant s_j$ (oče je večji ali enak svojim sinom);
- za neki $d \in \mathbb{N}$ ima vsaka veja d ali $d-1$ povezav; (drevo je karseda nizko);
- daljše veje so levo od krajših (drevo je levo poravnano).

V splošnem lahko številom $s_1, \ldots, s_n$ priredimo več različnih kopic. Tu je primer.



Kopica desetih števil 4, 2, 1, 10, 5, 6, 16, 11, 9, 8 ($d = 3$; označeni so tudi nivoji, kjer so vozlišča).
Opazimo: (a) če je L-s_i-D kopica s korenom s_i in poddrevesoma L in D, sta tudi L in D kopici;
(b) koren kopice je največje število v kopici;
(c) vozlišča vzdolž veje so urejena po velikosti.

Koliko je d? Kopica je *polno* drevo: vsak nivo ℓ, razen morda zadnji $\ell = d$, ima 2^ℓ vozlišč. Zato je d najmanjše naravno število, za katerega je $\sum_{\ell=0}^{d-1} 2^\ell < n \leqslant \sum_{\ell=0}^{d} 2^\ell$, tj. $2^d - 1 < n \leqslant 2^{d+1} - 1$ oz. $d - 1 < \log_2(n+1) - 1 \leqslant d$. Sledi $d = \lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil$.

Dana števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naj algoritem uredi v naraščajočem vrstnem redu, tj. razporedi v zaporedje $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$, da bo $a_{i_1} \leqslant a_{i_2} \leqslant \ldots \leqslant a_{i_n}$.

Kako bo naš algoritem uporabil kopico?

Zamisel:

A. *Iz števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sestavi začetno kopico števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

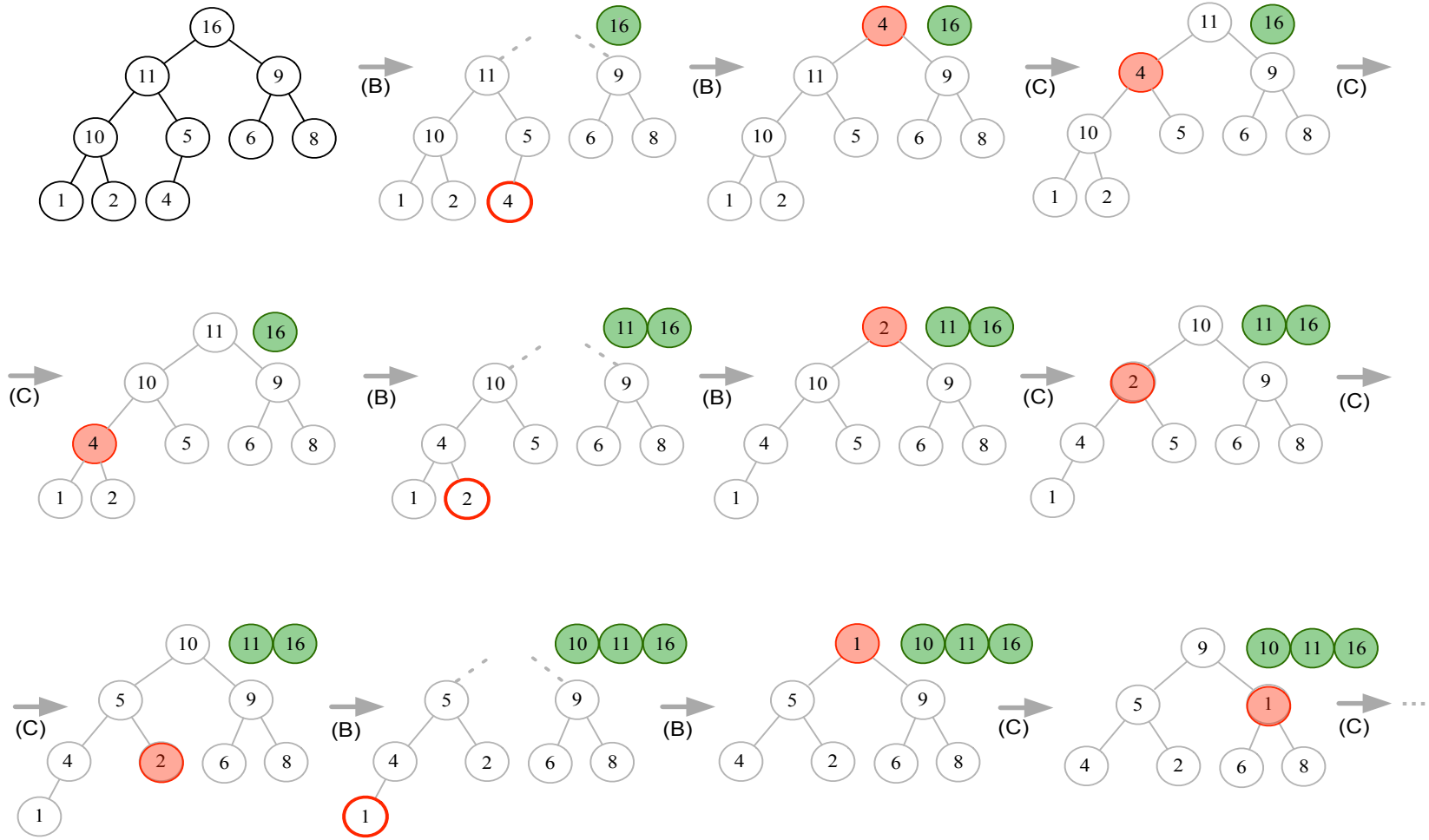
B. *Izloči koren kopice in ga shrani, na njegovo mesto prestavi enega od listov* (npr. skrajno desnega na najnižjem nivoju).

C. *Dobljeno drevo popravi v kopico.* Kako? *Prestavljeni list pogrezni vzdolž ustrezne veje na prvo mesto, kjer bo večji ali enak od tamkajšnjih sinov.* Takrat bo drevo kopica, a z enim vozliščem manj.

D. *Ponovi koraka (B,C) nad to kopico.*

Ko se ponavljata koraka (B,C), se nabirajo izločeni koreni, urejeni po velikosti, kopica pa kopni, dokler ni iz nje izločeno zadnje vozlišče. Takrat se algoritem ustavi.

Delovanje algoritma kaže naslednji primer.



Zdaj pa to zamisel razvijmo v algoritem. Poglejmo vsakega od korakov A,B,C,D.

A. Sestavljanje začetne kopice

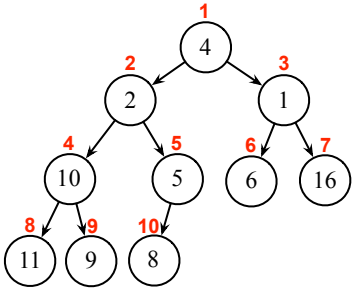
Števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naj bodo dana v tabeli t z n komponentami $t[i] = a_i$. Na tabelo t glejmo, kot da je zapis dvojiškega drevesa $T(t)$, definiranega takole:

- vozlišča drevesa $T(t)$ so števila $t[1], t[2], \ldots, t[n]$;
- koren drevesa $T(t)$ je število $t[1]$;
- če je $t[i]$ oče v $T(t)$, sta $t[2i]$ oz. $t[2i+1]$ (če obstaja) njegov levi oz. desni sin.

Primer. Dana so števila 4, 2, 1, 10, 5, 6, 16, 11, 9, 8 v tabeli $t =$

4	2	1	10	5	6	16	11	9	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Po zgornji definiciji tabela t opisuje tole drevo $T(t)$:



Komponente tabele t so črne, njihovi indeksi pa rdeči. Opazimo, da zaporedne komponente $t[1], t[2], \ldots, t[10]$ zapolnijo nivoje drevesa $T(t)$ po vrsti od zgoraj navzdol, vsak nivo pa po vrsti od leve proti desni.

Drevo $T(t)$ v splošnem ni kopica (glej zgornji primer).
Preden se lahko začne (B), bo treba $T(t)$ preurediti v kopico. Kako?

> **Predpostavimo**, da bi imeli na voljo proceduro `PopraviVKopico(t,i,n)`, ki bi *v dvojiškem drevesu $T(t)$ popravila drevo, katerega koren ima indeks i, v kopico – to bi znala storiti ob predpostavki, da sta obe poddrevesi tega korena že kopici.*
>
> Potem bi lahko $T(t)$ preuredili v kopico tako, da bi po nivojih od spodaj navzgor popravili vsa drevesa s koreni na tekočem nivoju. (Ta vrstni red bi zagotovil, da bosta ob vsakem klicu `PopraviVKopico(t,i,n)` poddrevesi vozlišča i že kopici.)
>
> Popravljanje bo teklo v želenem vrstnem redu, če bodo vozlišča obiskana po padajočih indeksih i (v zgornjem primeru 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1). Listi drevesa $T(t)$ so že kopice, zato se popravljanje sme začeti z zadnjim očetom, tj. $i = \lfloor n/2 \rfloor$.

To izvede spodnji programski odsek, ki t preuredi tako, da $T(t)$ postane kopica.

```
for i:=(n div 2) downto 1 do
  PopraviVKopico(t,i,n)      |Moramo razviti!!
endfor;
```

B. Izločanje korena in prestavljanje lista

Zdaj tabela t opisuje *kopico* $T(t)$.

Iz kopice $T(t)$ moramo izločiti koren in ga nadomestiti z zadnjim listom. To dosežemo tako, da zamenjamo prvo in n-to komponento tabele t in zabeležimo, da prvih $n-1$ komponent opisuje drevo, n-ta komponenta pa izločeni koren.

To se bo ponavljalo nad čedalje manjšimi kopicami. Zato bo t ostala sestavljena iz delov $t[1..r]$ in $t[r+1..n]$, kjer bo v prvem delu opis trenutnega drevesa, v drugem pa vsi dotlej izločeni koreni. Prvi se bo manjšal, drugi večal, tj. r manjšal.

Spodnji programski odsek zamenja koren trenutne kopice z njenim zadnjim listom in vključi stari koren v drugi del tabele t tako, da zmanjša mejo r med njima.

```
x:=t[1]; t[1]:=t[r]; t[r]:=x;
r--;
```

C. Popravljanje drevesa v kopico

Ko je koren izločen in nadomeščen z listom, je treba drevo, opisano v $t[1..r]$, popraviti v kopico. Kako?

V vsakem koraku popravljanja se prestavljeni list primerja s svojima sinovoma; če je kateri od njiju večji od lista, se list zamenja z večjim od sinov.

Tako se list pogrezne tja, kjer je večji ali enak od sinov. To opravi procedura `PopraviVKopico(t,i,r)`, ki predpostavlja, da sta poddrevesi vozlišča i že kopici.

```
procedure PopraviVKopico(t,r,i);     |V drev. t z r vozlisci popravi
begin                                |drevo s korenom ind=i v kopico
  if i<=(r div 2) then               |Ce je koren oce,
    s:=2*i;                          |bo s indeks levega sina.
    if s+1<=r then                   |Ce obstaja se desni sin,
      if t[s]<t[s+1] then s++ endif  |bo s indeks vecjega od sinov.
    endif;
    if t[i]<t[s] then                |Ce je oce manjsi od tega sina,
      x:=t[i]; t[i]:=t[s]; t[s]:=x;  |ju zamenjaj.
      PopraviVKopico(t,r,s)          |Popravi v kopico poddrevo,
    endif                            |katerega koren ima indeks s.
  endif
end.
```

D. Algoritem Heapsort

Zdaj lahko zgornje odseke združimo v cel algoritem za urejanje s kopicami.

```
procedure Heapsort(t,n);
begin
  for i:=(n div 2) downto 1 do      |Sestavi zacetno kopico t[1..n]
    PopraviVKopico(t,n,i);
  endfor;
  r:=n;
  while r>1 do
    x:=t[1]; t[1]:=t[r]; t[r]:=x;   |Zamenjaj v t[1..r] koren in list
    r--;                            |Izloci bivsi koren t[r]
    PopraviVkopico(t,r,1)           |Popravi drevo t[1..r] v kopico
  endwhile
end.
```

Časovna zahtevnost algoritma Heapsort

Časovna zahtevnost sestavljanja začetne kopice (korak A)?

Groba analiza koraka A: *Če bi* se `PopraviVKopico(t,n,i)` klicala pri *vsakem* $i = n, n-1, \ldots, 1$ *in če bi* pri vsakem i izvedla $d = \lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil$ pogrezanj, bi sestavljanje začetne kopice zahtevalo $nd = n\lceil \log_2(n+1) - 1 \rceil = \mathcal{O}(n \log n)$ pogrezanj (primerjanj in zamenjav). Sklep: A bi zahtevala $\mathcal{O}(n \log n)$ časa.

Natančna analiza koraka A: Ocena $\mathcal{O}(n \log n)$ ni napačna, je pa pregroba.
S podrobnejšo analizo pokažemo (glej knjigo), da korak A zahteva $\Theta(n)$ časa!

Koraka B in C se izvedeta n-krat. Izvedba enega para B,C zahteva *kvečjemu* $1 + d$ operacij (primerjanj in zamenjav), izvedba n parov pa kvečjemu $n(d+1)$, kar je zaradi $d \leqslant \log_2 n + 1$ reda $\mathcal{O}(n \log n)$. Natančna analiza da enak rezultat.

Sklep. *Algoritem Heapsort ima časovno zahtevnost* $\Theta(n \log n)$.

III.
Metode razvoja algoritmov

5. Kratek pregled metod

Želimo si splošnih pristopov k razvoju algoritmov, tj. *metod, ki nas bodo sistematično usmerjale pri naših poskusih, da bi razvili algoritem za dani problem.* Obravnavali bomo naslednje metode:

- **Deli in vladaj.**
- **Dinamičo programiranje.**
- **Požrešnost** (ali **Požrešna metoda.**)
- **Sestopanje.**
- **Gola sila.**
- (**Naravna inteligenca.**)

Običajno preizkusimo več metod. Različne metode vodijo do različnih algoritmov za dani problem. Šele analiza teh algoritmov in eksperimentalno testiranje na realnih primerkih problema razkrijeta, kateri algoritem je najustreznejši.

IV.
Deli in vladaj

6. Quicksort – Hitro urejanje

Vprašanje.

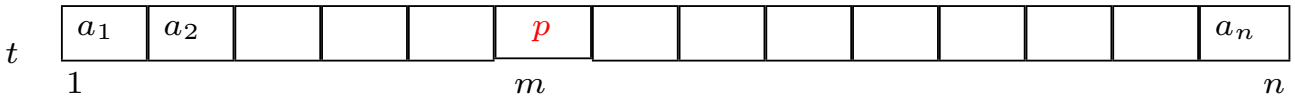
Ali poleg algoritma Heapsort obstaja še kakšen algoritem, ki uporablja operacijo primerjanja števil in doseže najmanjšo možno časovno zahtevnost $\Theta(n \log n)$?

Odgovor je *da*; tak algoritem bomo opisali v tem razdelku.

Prva zamisel: Quicksort prvič

Števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki jih želimo urediti v naraščajočem redu, so v tabeli $t[1..n]$. Zamislimo si naslednji algoritem:

A. *Izberi* eno izmed komponent tabele $t[1..n]$, denimo $t[m]$. Njeno vsebino a_m označi s p, torej $p := t[m]$. (To bo t.i. *pivot* oz. *delilni element.*)



B. *Prerazporedi* vsebine komponent tabele t tako, da bodo t sestavljale tri tabele t_1, t_2, t_3 z lastnostmi, kot kaže spodnja slika:

C. *Uredi* t_1 *in* t_3, in to kar z algoritmom, ki ga razvijamo v teh točkah A,B,C. (Algoritem bo zato *rekurziven.*)

Quicksort. Zgornji algoritem imenujemo *Quicksort*. Izvajanje opisuje procedura `Quicksort(t,r,s)`, ki tabelo `t[r..s]` števil uredi v naraščajočem redu.

```
procedure Quicksort(t,r,s);  |Uredi tabelo t[r..s]
begin
  if s<=r then return endif; |t[r..s] je trivialna, zato koncaj
  p := Pivot(t,r,s);         |Izberi delilni element p
  j := Razdeli(t,r,s);       |Razdeli t[r..s] v t[r..j-1],t[j],t[j+1..s]
  Quicksort(t,r,j-1);        |Uredi tabelo t[r..j-1]
  Quicksort(t,j+1,s)         |Uredi tabelo t[j+1..s]
end.
```

Razlaga. Če ima `t` nič ali le eno komponento, je `t` urejena in `Quicksort` se konča. V nasprotnem `Pivot(t,r,s)` izbere `p`, procedura `Razdeli(t,r,s)` pa preraz-poredi komponente tabele `t[r..s]` ($=t$) v tabeli `t[r..j-1]` ($=t_1$) in `t[j+1..s]` ($=t_3$), med katerima je `t[j]=p` ($=t_2$), in vrne `j`. Klica `Quicksort(t,r,j-1)` in `Quicksort(t,j+1,s)` uredita tabeli `t[r..j-1]` ($=t_1$) in `t[j+1..s]` ($=t_3$).

Raba. Števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$ so v tabeli `t[1..n]`. Klic `Quicksort(t,1,n)` uredi `t` v naraščajočem vrstnem redu, in sicer *na mestu*, kjer je `t`.

Zdaj pa podrobneje opišimo še proceduri `Pivot(t,r,s)` in `Razdeli(t,r,s)`.

A. Izbiranje delilnega elementa – `Pivot(t,r,s)`

Prvi način določanja pivota smo razkrili že v točki A: procedura `Pivot(t,r,s)` *izbere* vsebino ene od komponent tabele $t[r..s]$, torej $p := t[m]$, kjer $r \leqslant m \leqslant s$. Kakšen naj bo indeks m? Tu je več možnosti; na primer

- $m := r$;
- $m := s$;
- $m := \lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor$
- $m :=$ naključno izbran v $\{r, \ldots, s\}$.

Pri drugem načinu `Pivot(t,r,s)` *izračuna* p iz več komponent tabele $t[r..s]$; npr.

- $p := \frac{1}{2}(t[r]+t[s])$;
- $p := \frac{1}{3}(t[r]+t[\lfloor \frac{r+s}{2} \rfloor]+t[s])$;
- $p :=$ mediana $t[r..s]$;

Ali lahko mediano izračunamo hitro? Odgovorili bomo v enem od naslednjih poglavij. Pozor: pri drugem načinu se lahko zgodi, da je tabela t_2 prazna (zakaj?).

B. Razdelitev tabele s prerazporejanjem – `Razdeli(t,r,s)`

Radi bi, da bi prerazporejanje razmestilo vsebine komponent $t[r\,..\,s]$ tako, da bo

1. za neki j $(r \leqslant j \leqslant s)$ vsebina $t[j]$ dokončno na svojem mestu v tabeli $t[r\,..\,s]$;
2. vsebina vsake od komponent $t[r], \ldots, t[j-1]$ manjša ali enaka vsebini $t[j]$;
3. vsebina vsake od komponent $t[j+1], \ldots, t[s]$ večja ali enaka vsebini $t[j]$.

Tako prerazporejanje izvede procedura `Razdeli(t,r,s)` (na naslednji stani). Ta prerazporedi vsebine komponent tabele `t[r..s]` $(=t)$ v `t[r..j-1]` $(=t_1)$ in `t[j+1..s]` $(=t_3)$, med katerima je `t[j]` $(=t_2)$, tako da so vse `t[r..j-1]` $\leqslant$ `t[j]`, ta pa $\leqslant$ od vseh `t[j+1..s]`. Procedura vrne tudi indeks `j`.

`Razdeli(t,r,s)` ima dva indeksa. Prvi gre od začetka `t` v desno, drugi od konca v levo. Če naletita na števili, ki sta na napačnih straneh pivota, se števili zamenjata, indeksa pa nadaljujeta do naslednje te situacije, dokler se ne srečata.

Pozor: `Razdeli(t,r,s)` predpostavlja, da je *pivot že v prvi komponenti* tabele `t[r..s]`. (Če `Pivot(t,r,s)` izbere kako drugo komponento `t[m]` tabele `t[r..s]`, mora potem zamenjati še vsebini komponent `t[m]` in `t[r]`, da bo pivot v `t[r]`.)

```
procedure Razdeli(t,r,s) return int; |Razdeli t[r..s] v t[r..j-1],
begin                                |t[j],t[j+1..s] glede na p=t[r]
  p:=t[r]; i:=r; j:=s+1;
  while true do
    while t[++i]<p do if i=s break endif endwhile; |i od r+1 v desno
    while p<t[--j] do if j=r break endif endwhile; |j od s v levo
    if j<=i then break endif;                      |ce se i,j ne srecata,
    x:=t[i]; t[i]:=t[j]; t[j]:=x          |zamenjaj vsebini t[i],t[j]
  endwhile;
  x:=t[r]; t[r]:=t[j]; t[j]:=x;           |zamenjaj vsebini t[r],t[j]
  return j                                |vrni indeks j
end;
```

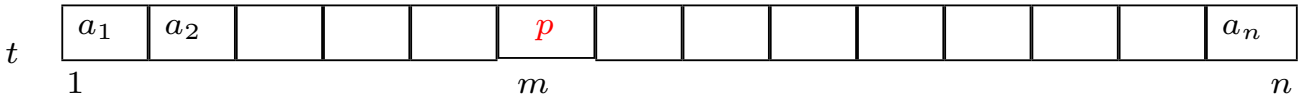
Opomba. *Quicksort začetno nalogo* ,,Uredi t" *problema* ,,*Uredi tabelo števil*" razdeli *v dve manjši nalogi* ,,Uredi t_1" *in* ,,Uredi t_3" *istega problema. Ko manjši nalogi reši, postane (pri tem problemu) rešena tudi začetna naloga. Deljenje naloge na manjše naloge iste vrste in sestavljanje rešitev manjših nalog v rešitev dane naloge je bistvo metode* **Deli in vladaj** *(več o njej v naslednjem poglavju*).

Druga zamisel: Quicksort drugič

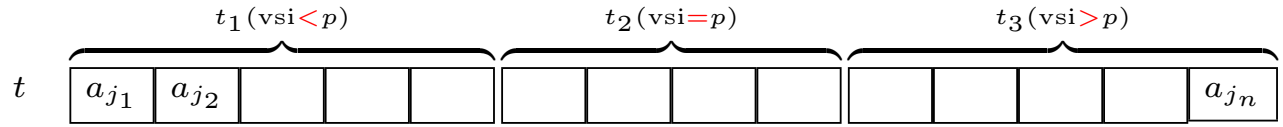
Prejšnji algoritem *Quicksort* razdeli t v t_1, t_2, t_3, kjer ima t_2 *eno* komponento p. Če so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ paroma različni ali je enakih malo, je to smiselno (ker v t_1, t_3 ostane nič ali malo števil p). *Če pa* se v $a_1, a_2, \ldots, a_n$ števila pogosto ponavljajo, je v t_2 bolje vključiti *vse* komponente z vsebino p (da sta t_1, t_3 manjši).

To je podlaga za naslednjo različico algoritma *Quicksort*:

A. Izberi v tabeli $t[1..n]$ pivot $p := t[m]$.



B. Prerazporedi vsebine komponent tabele t tako, da bodo t sestavljale tabele t_1, t_2, t_3, kjer bodo v t_2 vsebine vseh komponent $= p$, v t_1 vsebine vseh komponent $< p$, v t_3 pa vsebine vseh komponent $> p$:



C. Uredi vsako od t_1 in t_3 rekurzivno (pokliče samega sebe).

Quicksort. Procedura `Quicksort(t,r,s)` uredi `t[r..s]` v naraščajočem redu.

```
procedure Quicksort(t,r,s);                          |Uredi tabelo t[r..s]
begin
  if s<=r then return endif;  |t[r..s] je trivialna, zato koncaj
  u:=r; i:=r+1; v:=s;
  p:=Pivot(t,r,s);          |Izberi delilni element p
  (u,v):=Razdeli(t,r,s);|Razdeli t[r..s]:t[r..u-1],t[u..v],t[v+1..s]
  Quicksort(t,r,u-1);       |Uredi tabelo t[r..u-1]
  Quicksort(t,v+1,s)        |Uredi tabelo t[v+1..s]
end.
```

Razlaga. Če ima `t` nič ali eno komponento, je `t` že urejena in `Quicksort` se konča. `Pivot(t,r,s)` izbere `p`. `Razdeli(t,r,s)` prerazporedi `t[r..s]` ($=t$) v tabeli `t[r..u-1]` ($=t_1$) in `t[v+1..s]` ($=t_3$), med katerima je tabela `t[u..v]` ($=t_2$), in vrne meji `u`, `v`. `Quicksort(t,r,u-1)` in `Quicksort(t,v+1,s)` uredita tabeli `t[r..u-1]` ($=t_1$) in `t[v+1..s]` ($=t_3$).

Raba. `Quicksort(t,1,n)` uredi `t` (*na mestu*) v naraščajočem vrstnem redu.

A,B. Izbiranje delilnega elementa, razdelitev tabele s prerazporejanjem

Procedura `Pivot(t,r,s)` je lahko takšna kot pri prvi različici.

Spremeni pa se `Razdeli(t,r,s)`, saj mora prerazporediti `t[r..s]` v *tri* tabele (netrivialne) `t[r..u-1]`, `t[u,v]`, `t[v+1..s]` in vrniti *dva* indeksa, `u`, `v`.

> *Razlaga.* Med sprehodom `i` od `r+1` do `v` procedura `Razdeli(t,r,s)` obnavlja `u`,`v` tako, da v vsakem trenutku velja naslednja *zančna invarianta*
>
> (`t[r]`..`t[u-1]`<`p`)∧(`t[u]`..`t[i-1]`=`p`)∧(`t[i]`..`t[v]` neobiskani)∧(`t[v+1]`..`t[s]`>`p`).
>
> Ta nam pove, da bo `t[r..s]` pri `i`=`v` razdeljena v tri tabele `t[r..u-1]`, `t[u..v]`, `t[v+1..s]`, za katere bo veljalo `t[r..u-1]`<`p` ∧ `t[u..v]`=`p` ∧ `t[v+1..s]`>`p`.

Pozor: `Razdeli(t,r,s)` predpostavlja, da je *pivot že v prvi komponenti* tabele `t[r..s]`. (`Pivot(t,r,s)`, ki bi izbral kako drugo komponento tabele `t[r..s]`, denimo `t[m]`, bi moral potem zamenjati še vsebini `t[m]` in `t[r]`.)

```
procedure Razdeli(t,r,s) return (int,int);
begin
  p:=t[r]; u:=r; v:=s; i:=r+1;       |t[r] je pivot
  while i<=v do
    if t[i]<p
    then x:=t[u]; t[u]:=t[i]; t[i]:=x; u++; i++
    else if t[i]>p
         then x:= t[i]; t[i]:=t[v]; t[v]:=x; v--
         else i++
         endif
    endif
  endwhile
end;
```

Analiza časovne zahtevnosti algoritma *Quicksort*

Kakšno je časovna zahtevnost $T(n)$ urejanja $t[1..n]$ z algoritmom *Quicksort*? Poglejmo prvo različico algoritma in ob korakih zapišimo njihove zahtevnosti:

```
procedure Quicksort(t,1,n);                | T(n)
begin
  if n<=1 then return endif;               | Theta(1)
  p := Pivot(t,1,n);                       | Theta(1)
  j := Razdeli(t,1,n);                     | Theta(n)
  Quicksort(t,1,j-1);                      | T(j-1)
  Quicksort(t,j+1,n)                       | T(n-j)
end.
```

$T(n)$ je vsota vseh prispevkov, $T(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(n) + T(j-1) + T(n-j)$. Če uporabimo osnovne lastnosti asimptotične notacije, dobimo

$$T(n) = T(j-1) + T(n-j) + \Theta(n). \qquad (*)$$

Rešitev $(*)$ je odvisna od j (kjer se znajde pivot, oz. od $|t_1| = j-1$ in $|t_3| = n-j$).

Glede na to definiramo dve ekstremni izvedbi algoritma Quicksort: pri prvi sta $|t_1|$ in $|t_3|$ karseda različna ($j = 1$), pri drugi pa karseda podobna ($j \approx \frac{n-1}{2}$).

Pri prvi ekstremni izvedbi enačba $(*)$ preide v $T(n) = T(0) + T(n-1) + \Theta(n)$, ta pa zaradi $T(0) = \Theta(1)$ v

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(n),$$

ki ima rešitev $T(n)$ z lastnostjo $T(n) = \Theta(n^2)$. (Analiza za *najslabši* primer)

Pri drugi ekstremni izvedbi $(*)$ preide v $T(n) = T(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) + \Theta(n)$, ta pa zaradi $T(\lceil \frac{n-1}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor) \leqslant 2T(\frac{n}{2})$ v

$$T(n) \leqslant 2T(\tfrac{n}{2}) + \Theta(n),$$

katere rešitev $T(n)$ ima lastnost $T(n) = \Theta(n \log n)$. (Analiza za *najboljši* primer)

Analiza za povprečni primer

V praksi je izvedba Quicksort redko ekstremna; največkrat je ,,nekje vmes".

Analiza take izvedbe je bolj zapletena, ker mora upoštevati tudi *verjetnostni porazdelitvi* tabel t in pivotov, ki jih vrača *Pivot*.

Ti porazdelitvi običajno nista znani, zato bomo za prvi približek resničnosti vzeli, da so vse tabele t enako verjetne, prav tako tudi rezultati procedure *Pivot*.

Analizo bomo poenostavili (a vseeno dobili enak rezultat) še s tole predpostavko:

Predpostavka 1. Elementi tabele $t[1..n]$ naj bodo paroma različni.

Naš cilj je izračunati $\overline{T}(n)$, pričakovano časovno zahtevnost algoritma Quicksort.

Naj bo $D(k)$ dogodek, da je $p =$*Pivot(t,r,s)* po velikosti k-ti najmanjši element v $t[r..s]$. Naj bo $P(k)$ verjetnost dogodka $D(k)$.

Razdeli(t,r,s) prerazporedi $t[r..s]$ v $t[r..j-1]$, $t[j]$ in $t[j+1..s]$. Torej je $t[j] = p$. Če je p po velikosti k-ti najmanjši element v $t[r..s]$, je v prvi tabeli $k-1$ elementov, v drugi en element, v tretji pa $s-r+1-k$ elementov.

Pri začetni tabeli t je $r = 1$, $s = n$, zato je po prerazporejanju v prvi tabeli $k-1$ elementov, v drugi eden, v tretji pa $n-k$ elementov.

Zdaj imamo vse, kar rabimo, da lahko izrazimo pričakovani čas urejanja $t[1..n]$:

$$\overline{T}(n) = \sum_{k=1}^{n} P(k)\big[\overline{T}(k-1) + \overline{T}(n-k) + \Theta(n)\big]. \qquad (**)$$

Tu je $\Theta(n)$ časovna zahtevnost procedur *Pivot* in *Razdeli*.

Enačbo $(**)$ želimo razviti, zato moramo poznati verjetnosti $P(k)$.
Za začetek lahko smiselno predpostavimo, da so vse enake:

Predpostavka 2. Velja $P(k) = \frac{1}{n}$ za vsak $k = 1, \ldots, n$.

Zdaj se enačba $(**)$ da preoblikovati.

Trditev. Iz $(**)$ sledi enačba

$$\overline{T}(n) = cn + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{T}(k). \qquad (***)$$

Tudi $(***)$ je rekurzivna. Iz nje ni razvidno asimptotično vedenje funkcije $\overline{T}(n)$.
Lahko pa strogo dokažemo tole:

Trditev. Za rešitev enačbe $(***)$ velja $\overline{T}(n) \leqslant 2(b+c)\, n \ln n$, kjer $b, c \in \mathbb{R}$.

Sklep. *Algoritem Quicksort(t,1,n) ima pričakovano časovno zahtevnost* $\Theta(n \log n)$.

7. Metoda *deli in vladaj*

Pri razvoju algoritmov včasih lahko uporabimo metodo, imenovano *Deli in vladaj*. Njeno bistvo je:

Nalogo N problema P razdeli na manjše podnaloge,
te reši
in iz njihovih rešitev sestavi rešitev naloge N.

Podnaloge so lahko primerki drugih računskih problemov. Posebno zanimivo pa je, ko so vse podnaloge primerki problema P. Ali nam bo uspelo najti take podnaloge, je odvisno od samega problema P.

Nevede smo metodo že srečali pri algoritmu *Quicksort*. Tam smo nalogo N = ,,uredi tabelo t" razdelili s proceduro *Razdeli* na dve podnalogi N_1 = ,,uredi tabelo t_1" in N_2 = ,,uredi tabelo t_3". Podnalogi smo rešili kar s klicem samega algoritma *Quicksort*. Po izteku rekurzivnih klicev smo iz urejenih t_1 in t_3 ter trivialne t_2 brez dodatnega dela *sestavili* urejeno tabelo $t = t_1 t_2 t_3$.

Splošno.

Dana sta problem P in njegov primerek, tj. naloga $N \in P$, velikosti n. Denimo, da smo N razdelili na $p \geqslant 2$ podnalog $N_1, \ldots, N_p$ velikosti $n_1, \ldots, n_p$, ki so vse primerki problema P. Denimo, da je P tak, da je treba rešiti a podnalog $N_{i_1}, \ldots, N_{i_a}$, da lahko iz njihovih rešitev sestavimo rešitev naloge N. Ker so vse podnaloge primerki problema P, lahko za njihovo reševanje uporabimo kar A. Ogrodje algoritma A je torej tako:

```
procedure A(N);        |Algoritem A, razvit po metodi Deli in vladaj
begin
  if n<=1 then         |Ce N trivialna naloga, vrni trivialno resitev
    Vrni_resitev(N)
  else                 |Ce N ni trivialna naloga
    Razdeli(N);        |razdeli N na podnaloge N_1,...,N_p
    A(N_i_1);          |resi N_i_1
    ...                |...
    A(N_i_a);          |resi N_i_a
    Sestavi(N)         |sestavi resitve a podnalog v resitev naloge N
  endif
end.
```

Časovna zahtevnost algoritma A

Naj bodo $T(n)$, $R(n)$, $S(n)$ čas. zaht. procedur $A(N)$, *Razdeli*(N) in *Sestavi*(N). Iz algoritma A sledi, da je

$$T(n) = T(n_{i_1}) + \ldots + T(n_{i_a}) + R(n) + S(n).$$

Če velikosti n_i niso znane, te enačbe ne moremo razviti v koristnejšo obliko. Če pa nam uspe razdeliti N na (približno) enako velike N_i, potem za neki $c \geqslant 2$ velja $n_i = \frac{n}{c}$ (ali pa $n_i \approx \frac{n}{c}$). Enačbo zdaj lahko preoblikujemo v

$$T(n) = aT(\tfrac{n}{c}) + R(n) + S(n).$$

Pri $n = 1$ je N trivialna in rešljiva v nekem konstantnem času $b > 0$.

Skratka: če nam uspe razdeliti N na c-krat manjše podnaloge, od katerih jih moramo a rešiti, potem se enačba za časovno zahtevnost $T(n)$ algoritma A glasi:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{če } n \leqslant 1; \\ aT(\frac{n}{c}) + R(n) + S(n) & \text{če } n > 1, \end{cases} \qquad (*)$$

kjer so $a \geqslant 1$, $b > 0$ in $c \geqslant 2$.

Kako izračunati $T(n)$ iz rekurzivne enačbe $(*)$?

Pišimo

$$f(n) = R(n) + S(n).$$

$f(n)$ je *skupen čas*, potreben za *razdelitev* N na p podnalog in *sestavljanje* rešitev a podnalog v rešitev naloge N. Zanimali nas bodo problemi, kjer $f(n)$ narašča kvečjemu *polinomsko* hitro.

V nadaljevanju izračunamo $T(n)$ za splošno $f(n)$, potem pa za polinomsko $f(n)$.

$T(n)$ **za splošno funkcijo** $f(n)$

Iz enačbe $(*)$ lahko izpeljemo naslednji izraz za $T(n)$:

$$T(n) = n^{\log_c a}\left[b + \sum_{k=1}^{\log_c n} \frac{f(c^k)}{a^k}\right], \quad \text{kjer je } n > 1 \text{ in } T(1) = b. \qquad (**)$$

$T(n)$ **za polinomsko funkcijo** $f(n) = bn^d, d \geqslant 0$

Če ta $f(n)$ vstavimo v $(**)$ dobimo

$$T(n) = bn^{\log_c a}\left[1 + \frac{c^d}{a} + \left(\frac{c^d}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{c^d}{a}\right)^m\right], \quad \text{kjer } n > 1, m = \log_c n.$$

V oglatih oklepajih je geometrijska vrsta. Njena vsota je odvisna od velikosti $\frac{c^d}{a}$ v primerjavi z 1. Zato analiziramo vse tri možnosti.

Ugotovimo tole:

- če je $\frac{c^d}{a} > 1$, potem je $T(n) = \Theta(n^d)$
- če je $\frac{c^d}{a} = 1$, potem je $T(n) = \Theta(n^d \log n)$
- če je $\frac{c^d}{a} < 1$, potem je $T(n) = \Theta(n^{\log_c a})$

in strnemo v naslednji izrek.

Izrek. (Glavni izrek metode Deli in vladaj) Za rešitev $T(n)$ enačbe

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{če } n = 1; \\ aT(\frac{n}{c}) + bn^d & \text{če } n > 1, \end{cases}$$

kjer so $a \geqslant 1$, $b > 0$, $c \geqslant 2$ in $d \geqslant 0$, velja naslednje:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{če } \frac{c^d}{a} > 1; \\ \Theta(n^d \log n) & \text{če } \frac{c^d}{a} = 1; \\ \Theta(n^{\log_c a}) & \text{če } \frac{c^d}{a} < 1. \end{cases}$$

Primer 1. Preizkusimo izrek na algoritmu *Quicksort*. Če pivot razdeli tabelo na prvo in tretjo podtabelo (srednja je trivialna, zato $p = 2$), ki sta vedno enako veliki, je *Quicksort* oblike A za $c \approx 2$. Ostali parametri so: $a = 2$, ker je treba urediti *dve* podtabeli; $b > 0$ konstanta brez vpliva; in $d = 1$, ker ima razdelitev tabele na tri podtabele zahtevnost $\Theta(n)$, sestavljanje končne urejene tabele iz urejenih podtabel pa $\Theta(1)$. Vidimo, da je $\frac{c^d}{a} = \frac{2^1}{2} = 1$. Po zgornjem izreku je $T(n) = \Theta(n^d \log n) = \Theta(n \log n)$. To se sklada z analizo algoritma *Quicksort* za najboljši primer.

Primer 2. Preizkusimo izrek na algoritmu *BinSearch* za *dvojiško iskanje* elementa e v urejeni tabeli. Algoritem poznamo: če je srednji element s tabele enak iskanemu e, je iskanje uspešno, sicer se iskanje nadaljuje v podtabeli levo oz. desno od s (če $e < s$ oz. $s < e$). *BinSearch* je torej oblike A. Očitno je $p = 2$ (vedno sta *dve* podtabeli); $c \approx 2$ (podtabeli sta enako veliki); $a = 1$ (iskanje se nadaljuje v *eni* podtabeli); $d = 0$ (delitev tabele na dve je trivialna; prav tako tudi sestavljanje končnega odgovora). Torej imamo $\frac{c^d}{a} = \frac{2^0}{1} = 1$, zato je po zgornjem izreku časovna zahtevnost algoritma *BinSearch* $T(n) = \Theta(n^d \log n) = \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$, kar nam je že znano.

8. Množenje števil

Naj bosta dani n-mestni števili $a = a_{n-1} \dots a_1 a_0$ in $b = b_{n-1} \dots b_1 b_0$, zapisani v mestnem številskem sistemu z bazo B. Potem je njun produkt m-mestno število $ab = c = c_{m-1} \dots c_1 c_0$, kjer je $m \geqslant n$.

Problem. *Koliko množenj je potrebnih za izračun produkta dveh n-mestnih števil?*

Poglejmo, koliko množenj zahteva algoritem, ki smo se ga naučili v osnovni šoli.

$$
\begin{array}{r}
a_{n\text{-}1}\, a_{n\text{-}2} \ldots a_2\, a_1\, a_0 \times b_{n\text{-}1} b_{n\text{-}2} \ldots b_2 b_1 b_0 \\
\hline
u_n\, u_{n\text{-}1}\, u_{n\text{-}2} \ldots u_2\, u_1\, u_0 \\
\quad v_n\, v_{n\text{-}1} \ldots v_3\, v_2\, v_1\, v_0 \\
\quad\quad w_n \ldots w_4 w_3 w_2 w_1 w_0 \\
\quad\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad\quad\quad\quad\quad z_n\, z_{n\text{-}1} \ldots z_3\, z_2\, z_1\, z_0 \\
\hline
c_{m\text{-}1} c_{m\text{-}2} c_{m\text{-}3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots c_n\, c_{n\text{-}1} \ldots c_3\, c_2\, c_1\, c_0
\end{array}
$$

Računanje vsake vrstice zahteva n množenj $a_i \cdot b_j$ (in kvečjemu n seštevanj); zato računanje vseh n vrstic zahteva n^2 množenj $a_i \cdot b_j$ (in največ n^2 seštevanj). Končno seštevanje vrstic zahteva kvečjemu $n(n-1) + n = n^2$ seštevanj.

Sklep. *Šolski algoritem zmnoži dve n-mestni števili v času reda* $\Theta(n^2)$.

Ali se da zmnožiti dve n-mestni števili hitreje kot v času $\Theta(n^2)$? Se ju da zmnožiti v času $\Theta(n^\alpha)$ za neki $\alpha < 2$, ali pa morda celo v času $\Theta(n \log n)$?

Hitreje od $\Theta(n)$ se ne da, saj je treba izračunati $\Theta(n)$ števil $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$.

Pokazali bomo, da se ju da zmnožiti v času $\Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n^{1.584})$.

Karatsubov algoritem

Za izračun produkta ab je ruski matematik Anatolij Katsuba razvil hitrejši algoritem, in sicer z metodo *Deli in vladaj*: dano nalogo ,,Izračunaj $c = ab$" razdeli v tri manjše naloge ,,Izračunaj $z_1 = x_1 y_1$", ,,Izračunaj $z_2 = x_2 y_2$" in ,,Izračunaj $z_3 = x_3 y_3$", jih reši in iz njihovih rešitev z_1, z_2, z_3 sestavi rešitev c dane naloge.

Kako je Karatsuba iz a,b določil števila x_i, y_i in iz delnih rešitev z_1,z_2,z_3 sestavil c? Števili a in b zapišimo kot

$$a = a_L B^m + a_D$$
$$b = b_L B^m + b_D$$

kjer je

$$\overbrace{a_{n-1} \ldots a_m}^{a_L} \overbrace{a_{m-1} \ldots a_0}^{a_D}$$
$$\underbrace{b_{n-1} \ldots b_m}_{b_L} \underbrace{b_{m-1} \ldots b_0}_{b_D}$$

in $a_D, b_D < B^m$. Potem je iskani produkt c enak

$$ab = (a_L B^m + a_D)(b_L B^m + b_D) = \underbrace{a_L b_L}_{z_2} B^{2m} + \underbrace{(a_L b_D + a_D b_L)}_{z_1} B^m + \underbrace{a_D b_D}_{z_0}.$$

Karatsuba je opazil, da se da z_0, z_1, z_2 izračunati s samo *tremi* množenji takole:

- najprej izračunamo z_0 in z_2 (po njuni definiciji: $z_0 = a_D b_D$ in $z_2 = a_L b_L$),
- potem pa z_1 takole: $z_1 = (a_L + a_D)(b_L + b_D) - z_2 - z_0$.

Tako izračunani z_1 je enak $z_1 = a_L b_D + a_D b_L$ iz definicije.

Ta izboljšava zmanjša število podproblemov, ki jih je treba rešiti, z $a = 4$ na $a = 3$. Druga dva parametra algoritma pri tem ostaneta nespremenjena.

Ker je še vedno $\frac{c^d}{a} = \frac{2^1}{3} < 1$, bo zahtevnost Karatsubovega algoritma

$$T(n) = \Theta(n^{\log_c a}) = \Theta(n^{\log_2 3}) = \Theta(n^{1.58}).$$

To pa je hitreje od šolskega algoritma!

```
procedure Karatsuba(a,b) return integer; |Vrne produkt a*b
begin
  if a<B or b<B then retun a*b           |Ce je a ali b enomestno...
  else                |                |...sicer ju razdeli:
    n := min(size(a),size(b));           |krajse med a,b je n-mestno
    m := n div 2;
    (aL,aD) := split(a,m);               |razdeli a,b v aL,aD,bL,bD
    (bL,bD) := split(b,m);
    z0 := Karatsuba(aD,bD);              |izracunaj z0,z1,z2
    z2 := Karatsuba(aL,bL);
    z1 := Karatsuba(aL+aD,bL+bD)-z2-z0;
    return shift_left(z2,2*m)+shift_left(z1,m)+z0       |sestavi a*b
  endif
end.
```

Razlaga. Operacija `size(x)` določi, koliko mesten je argument `x`. Najbolje je, če sta oba a in b isti potenci števila 2, kar lahko dosežemo, če pri krajšem v njegovo dolžino štejemo ustrezno število vodilnih ničel. Števila a_L, a_D, b_L, b_D dobimo z operacijo `(xL,xD) := split(x,m)`, ki razdeli `x` v `xL` in `m`-mestni `xD`. Pri sestavljanju rezultata iz z_0, z_1, z_2 uporabimo operacijo `shift_left(x,y)`, ki pomakne `x` za `y` mest v levo. Če nam te operacije niso na voljo, si pomagamo z množenjem oz. deljenjem z B^m.

9. Množenje matrik

Če sta $A = (a_{ij})$ in $B = (b_{ij})$ matriki reda $n \times n$, je njun produkt $C = AB$ matrika reda $n \times n$ s komponentami $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. Običajni algoritem za izračun matrike C po vrsti izračuna vseh n^2 komponent, vsako po definiciji c_{ij}:

```
procedure MatProdukt(A,B,C);
begin
  C := 0;
  for i = 1 to n do
    for j = 1 to n do
      for k = 1 to n do
        C[i,j] := C[i,j] + A[i,k]*B[k,j]
      endfor
    endfor
  endfor
end.
```

Izračun C torej zahteva n^3 skalarnih množenj in $n^2(n-1)$ skalarnih seštevanj. Časovna zahtevnost algoritma je zato $\Theta(n^3)$. Ker so aditivne operacije $(+, -)$ hitrejše od multiplikativnih $(\times, \div)$, jih lahko zanemarimo, ne da bi to bistveno vplivalo na asimptotično časovno zahtevnost algoritma.

Problem. *Ali se da matriki reda $n \times n$ zmnožiti v času, manjšem od $\Theta(n^3)$?*

Ta čas je gotovo vsaj $\Omega(n^2)$, saj je treba izračunati n^2 komponent matrike C.

Poskus z metodo Deli in vladaj

Poskusimo razviti z metodo Deli in vladaj boljši algoritem za množenje matrik.
Predpostavka: n je potenca števila 2 (da bo lažje deliti matriko na podmatrike).

Vsako od matrik A, B si mislimo razdeljeno v štiri bločne podmatrike reda $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$.
Tedaj lahko izrazimo matrični produkt AB z matričnimi produkti podmatrik:

$$C = AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

kjer so

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}. \end{aligned}$$

Nalogo AB smo razdelili na 8 podnalog $A_{ij}B_{kl}$ enake vrste (matrično množenje).
Zato bo naš algoritem za računanje AB osemkrat klical samega sebe, dobljene rešitve podnalog pa sestavil tako, kot opisujejo zgornje enačbe za komponente C_{ij}.

Kakšna je časovna $T(n)$ zahtevnost tega algoritma? Čas $T(n)$ za izračun matričnega produkta $C = AB$ je sestavljen iz časa $8 \cdot T(\frac{n}{2})$, ki je potreben za izračun 8 matričnih produktov $A_{ij}B_{kl}$, in časa $4\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}$, ki je potreben za izračun 4 matričnih vsot (vsaka zahteva $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$ skalarnih vsot). Torej je $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 4 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$ oz.

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2.$$

Ali je časovna zahtevnost $T(n)$ tega algoritma manjša od $\Theta(n^3)$? Glavni izrek metode Deli in vladaj nam za funkcijo $T(n)$ pove naslednje: ker so v zgornji enačbi parametri $p = 8, a = 8, b = 1, c = 2, d = 2$, je $\frac{c^d}{a} = \frac{2^2}{8} = \frac{1}{2} < 1$, je

$$T(n) = \Theta(n^{\log_c a}) = \Theta(n^{\log_2 8}) = \Theta(n^3).$$

To je razočaranje! Asimptotična časovna zahtevnost našega, z metodo Deli in vladaj razvitega algoritma *ni manjša* od čas. zahtevnosti algoritma *MatProdukt*.

Da bi dosegli *asimptotično* manjši $T(n)$, bi morali najti taka števila a, c, d, ki bi izpolnila zahtevo

$$\frac{c^d}{a} < 1 \quad \wedge \quad \log_c a < 3.$$

Taka *števila* je lahko najti: npr., če obdržimo $c = 2, d = 2$, zahtevo izpolnijo $a = 5, 6, 7$.

Izziv pa je sestaviti *algoritem* vrste Deli in vladaj, ki bo imel take parametre. Npr., če izberemo parametre $a = 7, c = 2, d = 2$, to pomeni, da bi moral tak algoritem izračunati C (štiri podmatrike C_{ij}) s pomočjo le 7 produktov $A_{ij}B_{kl}$.

Je to sploh možno?

Strassenovo matrično množenje

Volker Strassen je leta 1969 odkril, da je to možno! Bistvo njegovega algoritma je v drugačnem računanju podmatrik C_{ij}. Tule je njegovo odkritje.

Če definiramo naslednjih osem matričnih produktov P_{ij},

$$\begin{aligned} P_{11} &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) & P_{21} &= (A_{22} + A_{11})(B_{22} + B_{11}) \\ P_{12} &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) & P_{22} &= (A_{21} - A_{11})(B_{12} + B_{11}) \\ P_{13} &= (A_{11} + A_{12})B_{22} & P_{23} &= (A_{22} + A_{21})B_{11} \\ P_{14} &= A_{22}(B_{11} - B_{21}) & P_{24} &= A_{11}(B_{22} - B_{12}) \end{aligned}$$

potem lahko štiri podmatrike C_{ij} izračunamo takole:

$$\begin{aligned} C_{11} &= P_{11} + P_{12} - P_{13} - P_{14} \\ C_{12} &= P_{13} - P_{24} \\ C_{21} &= P_{23} - P_{14} \\ C_{22} &= P_{21} + P_{22} - P_{23} - P_{24}. \end{aligned}$$

Ta definicija je zvita: izrazi za C_{ij} so *linearni*, produkta P_{11} in P_{21} pa *enaka*! Ker bo treba izračunati le enega od njiju, bo za izračun vseh štirih C_{ij} potrebnih le *sedem* matričnih množenj.

S predpostavko, da je n potenca števila 2, Strassenov algoritem zapišemo takole:

```
procedure Strassen(A,B,n) return C;
begin
  if n=1 then C := AB   |Ce sta A in B trivialni matriki (skalarja)
  else
    (A_11,A_12,A_21,A_22) := Razdeli(A,n);       |Razdeli A v bloke
    (B_11,B_12,B_21,B_22) := Razdeli(B,n);       |Razdeli B v bloke
    P_11 := Strassen(A_11+A_22, B_11+B_22, n/2);
    P_12 := Strassen(A_12-A_22, B_21+B_22, n/2);
    P_13 := Strassen(A_11+A_12, B_22, n/2);
    P_14 := Strassen(A_22, B_11-B_21, n/2);
    P_22 := Strassen(A_21-A_11, B_12+B_11, n/2);
    P_23 := Strassen(A_22+A_21, B_11, n/2);
    P_24 := Strassen(A_11, B_22-B_12, n/2);
    C_11 := P_11+P_12-P_13-P14;              |Sestavi bloke Cij ...
    C_12 := P_13-P_24;
    C_21 := P_23-P_14;
    C_22 := P_21+P_22-P_23-P24;
    C := Sestavi(C_11,C_12,C_21,C_22, n/2)        |... in iz njih C
  endif
end.
```

Kakšna je časovna zahtevnost Strassenovega algoritma. Za izračun vseh podmatrik C_{ij} je potrebnih 7 matričnih množenj reda $\frac{n}{2}$ (pri računanju P_{ij}) in 18 matričnih vsot/razlik (od tega 10 pri računanju P_{ij} in 8 pri računanju C_{ij}). Torej je $T(n) = 7 \cdot T(\frac{n}{2}) + 18 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2}$, oz.

$$T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + 4.5\,n^2.$$

Zdaj so parametri te enačbe $a = 7, b = 4.5, c = 2$ in $d = 2$. Ker je $\frac{c^d}{a} = \frac{2^2}{7} = \frac{4}{7} < 1$, je po Glavnem izreku metode Deli in vladaj

$$T(n) = \Theta(n^{\log_c a}) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2.80735}).$$

Sklep. *Strassenovo množenje matrik reda $n \times n$ ima časovno zahtevnost* $\Theta(n^{2.80735})$.

10. *k*-ti najmanjši element

k-ti najmanjši element tabele t je element, od katerega je manjših ali enakih natanko $k-1$ elementov tabele t. To je element, ki bi bil na k-tem mestu v urejeni t. Npr., v (7,2,2,5,6,1) je 4-ti najmanjši element 5, ker je na 4. mestu v (1,2,2,5,6,7).

Problem: *V neurejeni tabeli t z n števili poišči k-to najmanjše število* $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Poiščimo kako spodnjo in zgornjo mejo za časovno zahtevnost $T(n)$ tega problema. Meji nam bosta pomagali, da ne bomo iskali algoritma, ki ga sploh ni ali pa algoritma, ki bi bil nepotrebno počasen. Najbolje bi bilo, če bi našli *tesni* meji za $T(n)$, tj. *največjo spodnjo* in *najmanjšo zgornjo* mejo za $T(n)$. Žal je iskanje tesnih mej pogosto zelo zahtevno.

Na rešitev našega problema lahko vpliva vsak element tabele. Zato mora vsak algoritem za ta problem *vsaj prebrati vseh n elementov*. Zato je zahtevnost vsakega algoritma vsaj linearna, tj. $T(n) = \Omega(n)$. Torej ne bomo iskali algoritmov, ki bi imeli časovno zahtevnost asimptotično manjšo od $\Theta(n)$.

Po drugi strani pa si takoj lahko zamislimo *očiten algoritem*, ki reši naš problem. Ta algoritem (1) uredi tabelo t (v času $\Theta(n \log n)$, npr. z algoritmom *Heapsort*) in (2) vrne element na njenem k-tem mestu. Torej je smiselno iskati algoritem, ki bo imel časovno zahtevnost $T(n)$ asimptotično manjšo od $\Theta(n \log n)$.

Zamisel.

Metoda Deli in vladaj nas napelje, da si zamislimo naslednji algoritem:

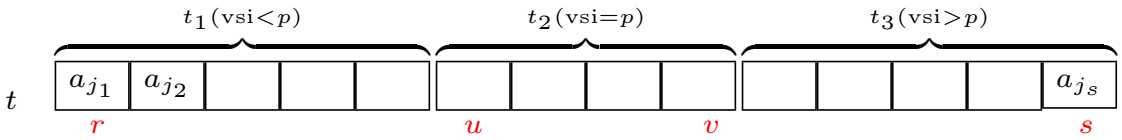
- Izberimo element p (*pivot*) in prerazporedimo elemente tabele t v tabele t_1, t_2, t_3, da bodo v t_1 vsi elementi $< p$, v t_2 vsi $= p$, v t_3 pa vsi $> p$.
- Iz velikosti $|t_1|$ in $|t_2|$ lahko ugotovimo, v kateri od t_1, t_2, t_3 je k-ti najmanjši element tabele t. Namreč: če je $k \leqslant |t_1|$, je v t_1; če je $|t_1| < k \leqslant |t_1| + |t_2|$, je v t_2; in če je $k > |t_1| + |t_2|$, je v t_3. Iskanje bomo zato nadaljevali le v tisti tabeli.
- Če je v t_1, z rekurzivnim klicem tega algoritma poiščemo k-ti najmanjši element v t_1; če je v t_2, je iskani element p; in če je v t_3, z rekurzivnim klicem tega algoritma poiščemo $k - |t_1| - |t_2|$-ti najmanjši element v t_3.

Torej se reševanje trenutne naloge nadomesti z reševanjem *ene* od treh podnalog.

Zamisel algoritma je zapisana spodaj. Dodali smo ji del, ki reši trivialno veliko nalogo (nalogo z manj kot $n_{\min}$ elementi za neki $n_{\min}$, ki ga bomo morali še določili). Procedura *Uredi* je lahko kako od navadnih urejanj, proceduri *Pivot* in *Razdeli* pa smo opisali pri algoritmu *Quicksort*.

```
procedure Isci(k,t) return int;   |k-ti najmanjsi element v tabeli t
begin
  if |t| < n_min then Uredi(t); return(t[k])
  else
    p := Pivot(t);
    Razdeli(t,t_1,t_2,t_3);
    if k <= |t_1| then Isci(k,t_1)
    else if k <= |t_1|+|t_2| then return(p)
    else Isci(k-|t_1|-|t_2|,t_3)
    endif
  endif
end.
```

Oznake t, t_1, t_2, t_3 zamenjajmo z oznakami $t[r..s], t[r..u-1], t[u..v], t[v+1..s]$, da postanejo dosegljive meje r, s, u, v teh tabel. Glede na to proceduram prilagodimo njihove argumente, procedura *Razdeli* pa naj vrne še meji u, v tabele t_2.




```
procedure Isci(k,t,r,s) return int;          |k-ti najmanjsi v t[r..s]
begin
  if s-r+1 < n_min then Uredi(t,r,s); return(t[r+k-1])
  else
    p := Pivot(t,r,s);
    (u,v) := Razdeli(t,r,s);
    if k <= u-r then Isci(k,t,r,u-1)
    else if k <= v-r+1 then return(p)
    else Isci(k-v+r-1,t,v+1,s)
    endif
  endif
end.
```

Raba. Števila so v `t[1..n]`. `Isci(k,t,1,n)` vrne k-ti najmanjši element v `t`.

Vprašanja: *Koliko je n_{min}? Kako izbrati p? Kakšna je časovna zahtevnost algoritma?*

Enostavni algoritem

Poiščimo odgovore po najlažji poti: naj bo $n_{\min} = 1$ in p naključno izbran element tabele t. Kakšno časovno zahtevnost $T(n)$ ima tedaj ta algoritem?

Analizirajmo algoritem za *najslabši primer*. V pesimističnem scenariju bo p vedno največji element v t, ki bo poleg tega en sam. Zato bo v t_1 n–1 elementov, v t_2 en sam element p, t_3 pa bo prazna. Iskanje se bo nadaljevalo v t_1, kjer se bo po pesimističnem scenariju zgodilo podobno. Torej bo v najslabšem primeru $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$. To rekurzivno enačbo smo rešili pri analizi algoritma *Quicksort* za najslabši primer, zato vemo, da je $T(n) = \Theta(n^2)$. To pa nam ni všeč, saj že *očitni algoritem* vedno najde iskani element v času $\Theta(n \log n)$.

Blum-Floyd-Pratt-Rivest-Tarjanov algoritem *IsciBFPRT*

Enostavni algoritem ima v najslabšem primeru *kvadratno* časovno zahtevnost. Morda se nam zdi, da je vzrok za to v naključnem izbiranju pivota p. Toda: tudi če bi p izbirali s kakim že omenjenim pravilom (p=prvi; p=zadnji; p=srednji v t) bi imel algoritem v najslabšem primeru kvadratno časovno zahtevnost.

Morda pa bi bilo treba p izbirati bolj premišljeno? Morda tako, da nobena od tabel t_1 in t_3 ne bi bila ,,pretirano" večja od druge, saj bi bilo potem manj pomembno, v kateri od njiju se bo nadaljevalo iskanje. (Tabela t_2 nas ne skrbi, ker ,,iskanje" v njej vrne p v času $\Theta(1)$.) Vprašanje je torej:

Kako zagotoviti, da nobena od dolžin $|t_1|$ *in* $|t_3|$ *ne bo ,,pretirano" večja od druge?*

(Kaj pomeni ,,pretirano" nam zdaj še ni povsem jasno.)

Odgovor so našli M. Blum, R. Floyd, V. Pratt, R. Rivest in R. Tarjan.
Pivot p moramo izračunati z novo proceduro *PivotBFPRT* takole:

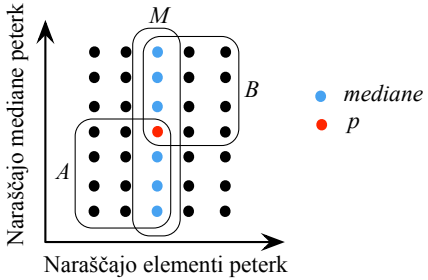
1. Tabelo t razdelimo v peterke (tabele po pet zaporednih elementov).
2. V vsaki peterki poiščemo njeno mediano (tretji najmanjši element).
3. Naj bo M tabela vseh dobljenih median.
4. Potem naj bo p mediana elementov tabele M.

Ta p uporabimo v proceduri *Razdeli*, ki razdeli t v tabele t_1, t_2, t_3.

Prednost novega pivota p pa nam razkrije naslednja trditev.

Trditev. Po razdelitvi tabele t s tako izračunanim p velja $|t_1| \leqslant \frac{3}{4}|t|$ in $|t_3| \leqslant \frac{3}{4}|t|$.

Dokaz. Uredimo M, vsaki mediani pritaknimo ostale štiri elemente iz njene peterke, da postane urejena, in peterke organizirajmo kot kaže slika. V A so vsi elementi tabele t, ki so $\leqslant p$. (Podobno so v B vsi, ki so $\geqslant p$; teh je $|B| = 3\lfloor \frac{|M|}{2} \rfloor = 3\lfloor \frac{1}{2} \cdot \frac{|t|}{5} \rfloor = 3\lfloor \frac{|t|}{10} \rfloor$.) Ker so v t_1 vsi $< p$, je $t_1 \subseteq A$. Sledi $|t_1| \leqslant |A| \leqslant |t| - |B| = |t| - 3\lfloor \frac{|t|}{10} \rfloor \leqslant \lceil \frac{7}{10}|t| \rceil \leqslant \frac{3}{4}|t|$. (Podobno za $|t_3| \leqslant \frac{3}{4}|t|$.) □



Če je p izračunan z novim postopkom, po razdelitvi t v t_1, t_2, t_3 nobena od t_1 in t_3 ni ,,pretirano" večja od druge, kjer ,,pretirano" pomeni ,,več kot trikrat".

(Zakaj? Ker je $|t_1| + |t_3| = |t| - |t_2|$, ima v skrajnem primeru ena od njiju $\frac{3}{4}|t|$ elementov, druga pa $|t| - |t_2| - \frac{3}{4}|t| = \frac{1}{4}|t| - |t_2|$, kar je vsaj $\frac{1}{4}|t| - 1$. Razmerje $\frac{|t_1|}{|t_3|}$ je zato kvečjemu $\frac{\frac{3}{4}|t|}{\frac{1}{4}|t|-1} < 3$.)

Kako *PivotBFPRT* izračuna p? Mediano peterke lahko najde v času $O(1)$, npr. z odločitvenim drevesom petih elementov. Ker je vseh peterk $\lceil \frac{|t|}{5} \rceil$, priprava M zahteva $\Theta(1) \cdot \lceil \frac{|t|}{5} \rceil = \Theta(|t|)$ časa. Kako pa določi mediano $\lceil \frac{|t|}{5} \rceil$ elementov tabele M? Mediana je element, od katerega je manjših ali enakih polovica elementov tabele. Mediana p je zato $\lceil \frac{|M|}{2} \rceil$-ti najmanjši element tabele M, kjer je $|M| = \lceil \frac{|t|}{5} \rceil$. *PivotBFPRT* mora torej poklicati proceduro $IsciBFPRT(|M|/2, M)$, da ji ta izračuna mediano tabele M. Tu je rekurzija posredna: *IsciBFPRT* pokliče *PivotBFPRT*, ki pokliče *IsciBFPRT* itd. Algoritem *IsciBFPRT* za iskanje k-tega najmanjšega elementa se zdaj glasi

```
procedure IsciBFPRT(k,t,r,s) return int;   |k-ti najmanjsi v t[r..s]
begin
  if s-r+1 < n_min then Uredi(t,r,s); return(t[r+k-1])
  else
    p := PivotBFPRT(t,r,s);
    (u,v) := Razdeli(t,r,s);
    if k <= u-r then IsciBFPRT(k,t,r,u-1)
    else if k <= v-r+1 then return(p)
    else IsciBFPRT(k-v+r-1,t,v+1,s)
    endif
  endif
end.
```

Časovna zahtevnost algoritma *IsciBFPRT*

Analizirajmo časovno zahtevnost $T(n)$ algoritma *IsciBFPRT* za najslabši primer. Zakaj za najslabši primer? Zato, ker nas zanima, ali raba pivota, ki ga izračuna *PivotBFPRT*, izboljša najslabšo časovno zahtevnost $\Theta(n^2)$ enostavnega algoritma. Zapišimo algoritem *IsciBFPRT* pri parametrih $r = 1$ in $s = n$:

```
procedure IsciBFPRT(k,t,1,n) return int;     |k-ti najmanjsi v [1..n]
begin
  if n < n_min then Uredi(t,1,n); return(t[k])
  else
    p := PivotBFPRT(t,r,s);
    (u,v) := Razdeli(t,r,s);
    if k <= u-r then IsciBFPRT(k,t,r,u-1)
    else if k <= v-r+1 then return(p)
    else IsciBFPRT(k-v+r-1,t,v+1,s)
    endif
  endif
end.
```

Naj bo $T(n)$ najslabša časovna zahtevnost zgornjega algoritma. Poskušajmo izraziti $T(n)$ v vsakem od možnih primerov, tj. ko je $n \geqslant n_{\min}$ in ko je $n < n_{\min}$:

- $n \geqslant n_{\min}$. V tem primeru časovno zahtevnost $T(n)$ sestavlja več prispevkov:

  $$\begin{aligned} T(n) = {} & \Theta(n) && \text{—časovna zahtevnost računanja } M \\ & + T(\tfrac{n}{5}) && \text{—najslabša časovna zahtevnost računanja } p \\ & + \Theta(n) && \text{—časovna zahtevnost razporejanja } t \text{ v } t_1, t_2, t_3 \\ & + T(\max\{|t_1|, |t_3|\}) && \text{—časovna zahtevnost iskanja po večji od } t_1, t_3 \end{aligned}$$

  Zaradi prejšnje trditve sledi $T(n) = T(\frac{n}{5}) + cn + T(\frac{3}{4}n)$, kjer je $c > 0$.
- $n < n_{\min}$. Vzemimo za $n_{\min}$ tisto velikost, do katere je *ureditev* tabele t (velikosti $n < n_{\min}$) hitrejša od cn. Za take velikosti n je $T(n) \leqslant cn$. Število $n_{\min}$ najdemo eksperimentalno; literatura navaja $n_{\min} = 50$.

Možna primera vodita do rekurzivne enačbe za najslabšo časovno zahtevnost:

$$T(n) \leqslant \begin{cases} cn & \text{če } n < n_{\min}; \\ T(\frac{n}{5}) + cn + T(\frac{3}{4}n) & \text{če } n \geqslant n_{\min}. \end{cases}$$

Zdaj moramo iz te enačbe nekako izluščiti le še to, kako hitro narašča $T(n)$.

Tu nas prijetno preseneti naslednja ugotovitev:

Trditev. $T(n) \leqslant 20cn$.

Ideja dokaza. Najprej moramo dokazati, da trditev velja za vse $n \leqslant n_{\min} = 50$. Nato za osnovo indukcije vzamemo trditev pri $n = n_{\min} = 50$. Veljavnost indukcijskega koraka z n na $n + 1$ preverimo pri $n \geqslant n_{\min} = 50$. (Podrobnosti tukaj opustim in jih prepustim za vajo.) □

Sklep. *V neurejeni tabeli t lahko k-ti najmanjši element najdemo v času* $\Theta(n)$.

Opomba. Na začetku smo videli, da iskanje k-tega najmanjšega elementa v neurejeni tabeli velikosti n zahteva vsaj $\Omega(n)$ časa. Pravkar pa smo dokazali, da to iskanje zahteva največ $\mathcal{O}(n)$ časa. Ker sta spodnja in zgornja meja časovne zahtevnosti tega problema enaki, in ima izboljšani algoritem časovno zahtevnost $\Theta(n)$, je *asimpotično optimalen.*

11. Diskretna Fourierova transformacija

Diskretna Fourierova transformacija ima pomembno vlogo v praksi. Algoritem za njen izračun bomo razvili z metodo Deli in vladaj. Pred tem pa bralca motivirajmo.

Motivacija

Problem: *Koliko operacij množenja zahteva izračun produkta* $r(x) = p(x)q(x)$, *kjer sta* $p(x)$ *in* $q(x)$ *dana polinoma stopenj* n *in* m*?*

Ocenimo število množenj, ki jih zahteva izračun $r(x)$ po običajni poti. Pišimo

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{in} \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i.$$

Tedaj je

$$r(x) = p(x)q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right).$$

Produkt $r(x)$ je polinom spremenljivke x in stopnje $n+m$,

$$r(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i,$$

s koeficienti c_i, ki jih izračunamo iz koeficientov polinomov $p(x)$ in $q(x)$. Kako? Potenca x^i (ob c_i) lahko nastane le iz produktov potenc x^k in x^{i-k} (ob a_k in b_{i-k}), kjer je $k = 0, \ldots, i$. Zato za c_i, kjer je $i = 0, \ldots, n+m$, velja

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}.$$

Izračun c_i zahteva $i+1$ množenj. Izračun vseh $n+m+1$ koeficientov c_i zato zahteva $\sum_{i=0}^{n+m}(i+1) = \sum_{i=0}^{n+m} i + \sum_{i=0}^{n+m} 1 = \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n + m + 1 = \Theta((n+m)^2)$ množenj.

Sklep. *Izračun produkta $r(x) = p(x)q(x)$ zahteva kvečjemu $\mathcal{O}((n+m)^2)$ množenj.*

Vprašanje: Ali se produkt $r(x)$ dá izračunati z asimptotično manj množenji?

Zamisel

- $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ lahko predstavimo v obliki $(a_0, \ldots, a_n)$. Temu rečemo *koeficientna predstavitev* (k.p.) polinoma $p(x)$. Da je $p(x)$ predstavljen v tej obliki, zapišemo s $p(x) \overset{\text{k.p.}}{=} (a_0, \ldots, a_n)$. Podobno je $q(x) \overset{\text{k.p.}}{=} (b_0, \ldots, b_m)$.

  Polinome pa lahko natančno opišemo tudi z njihovimi vrednostmi v izbranih številih. Npr., $p(x)$ lahko podamo v obliki $(p_0, \ldots, p_n)$, kjer so $p_i = p(t_i)$ njegove vrednosti v $n+1$ paroma različnih številih $t_0, \ldots, t_n$. Temu rečemo *vrednostna predstavitev* (v.p.) polinoma $p(x)$. Da je $p(x)$ predstavljen v tej obliki, zapišemo s $p(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (p_0, \ldots, p_n)$. Podobno je tudi $q(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (q_0, \ldots, q_m)$, kjer so $q_i = q(t'_i)$ in $t'_0, \ldots, t'_m$ paroma različna števila.

Primer. Koeficientna predstavitev polinoma $p(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$ je $p(x) \overset{\text{k.p.}}{=} (1, -2, 5, 0, 3)$, vrednostna v točkah $(-2, -1, 0, 1, 2)$ pa $p(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (p(-2), p(-1), p(0), p(1), p(2)) = (73, 11, 1, 7, 65)$.

- *Predpostavimo*, da sta $p(x)$ in $q(x)$ dana z vrednostnima predstavitvama

$$p(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (p_0, \ldots, p_n) \qquad \text{in} \qquad q(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (q_0, \ldots, q_m),$$

kjer je $p_i = p(t_i)$ za $i = 0, \ldots, n$ in $q_j = q(t_j)$ za $j = 0, \ldots, m$.

Kako izračunamo produkt $r(x) = p(x)q(x)$*? Koliko množenj je potrebnih?*

- Ker sta $p(x)$ in $q(x)$ vrednostno predstavljena, lahko domnevamo, da bomo zadovoljni tudi z vrednostno predstavljenim produktom $r(x)$. Torej iščemo

$$r(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (r_0, \ldots, r_s),$$

kjer je $r_i = r(t_i) = p(t_i)q(t_i) = p_i q_i$ za $i = 0, \ldots, s$.

Koliko je s, stopnja polinoma $r(x)$? Stopnji polinomov $p(x)$ in $q(x)$ sta n in m (saj imata njuni v.p. $n+1$ in $m+1$ elementov), zato je $r(x)$ stopnje

$$s = n + m.$$

Torej moramo izračunati $n + m + 1$ vrednosti $r_0, \ldots, r_{n+m}$.

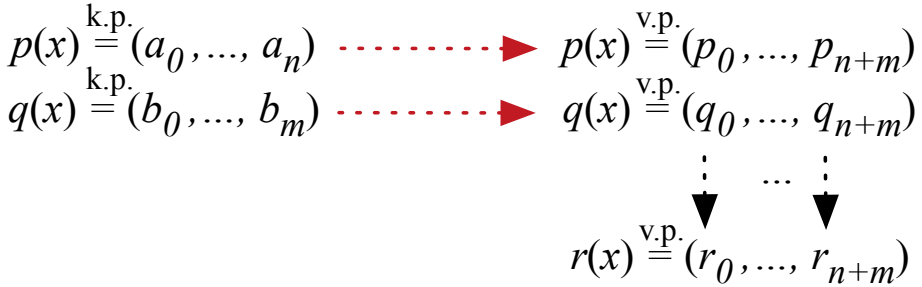
Ker je $r_i = p_i q_i$, bomo množili *istoležne* vrednosti iz $(p_0, \ldots, p_n)$ in $(q_0, \ldots, q_m)$. Opazimo težavo: Za izračun $n+m+1$ vrednosti r_i bi morali v.p. polinomov $p(x)$ in $q(x)$ vsebovati vsaka po $n+m+1$ vrednosti (ne pa le $n + 1$ in $m + 1$). Zato vsako od teh v.p. *dopolnimo* z vrednostmi polinoma v dodatnih točkah. Dobimo $p(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (p_0, \ldots, p_{n+m})$ in $q(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (q_0, \ldots, q_{n+m})$.

Zdaj lahko izračunamo $r(x) \overset{\text{v.p.}}{=} (r_0, \ldots, r_{n+m})$ z $n+m+1$ množenji $r_i := p_i q_i$.

Sklep. *Z uporabo v.p. lahko izračunamo $r(x) = p(x)q(x)$ s $\Theta(n+m)$ množenji!*

Problem

Zmanjšanje števila množenj s $\Theta((n+m)^2)$ na $\Theta(n+m)$ smo dosegli z uporabo drugačne predstavitve polinomov $p(x), q(x)$ in $r(x)$. Kaj pa če $p(x)$ in $q(x)$ ne bi bila dana v vrednostni temveč koeficientni predstavitvi? Potem bi morali njuni koeficientni predstavitvi najprej *pretvoriti* v vrednostni, kot kaže spodnja slika:



Da pa bi se to izplačalo, bi morala pretvorba k.p. obeh polinomov zahtevati *asimptotično manj* kot $\Theta((n+m)^2)$ množenj (sicer bi izračunali $r(x) = p(x)q(x)$ kar z običajnim postopkom, opisanem v razdelku z motivacijo).

Ocenimo, koliko množenj bi morala zahtevati pretvorba k.p. *enega* polinoma, da bi se pretvarjanje obeh izplačalo. Kadar imata polinoma isto stopnjo $n = m$, zahteva običajni postopek $\Theta((n+n)^2) = \Theta(n^2)$ množenj. Če bi pretvorba predstavitve *enega* polinoma zahtevala $\Theta(n^2)$ množenj, bi naša zamisel zahtevala $\Theta(n^2) + \Theta(n^2) + \Theta(2n)$ množenj, kar je še vedno reda $\Theta(n^2)$. Zato potrebujemo postopek, ki bo k.p. polinoma stopnje n pretvoril v v.p. z *asimptotično manj kot* $\Theta(n^2)$ *množenji.* Torej moramo rešiti naslednji problem:

Problem. *Kako pretvoriti k.p. polinoma stopnje n v v.p. z manj kot* $\Theta(n^2)$ *množenji?*

Za računanje vrednosti polinomov že imamo na voljo znani *Hornerjev postopek*. Ali ta reši naš problem. Spomnimo se ga na polinomu iz prejšnjega primera.

Primer. Naj bo $p(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$. Po Hornerju izračunamo vrednost $p(t)$ pri $t = 2$ takole: $p(t) = (((3t + 0)t + 5)t - 2)t + 1 = (((3 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 5) \cdot 2 - 2) \cdot 2 + 1 = 65$. □

Vrednost polinoma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ pri $x = t$ izračunamo takole: $p(t) = (\ldots((a_n \cdot t + a_{n-1}) \cdot t + a_{n-2}) \cdot t + \ldots a_1) \cdot t + a_0$. Izračun $p(t)$ zahteva n množenj. Ker pa je za pretvorbo k.p. $p(x)$ v v.p. treba izračunati $n + 1$ vrednosti $p(t_0), p(t_1), \ldots, p(t_n)$, bi pretvorba zahtevala $n(n + 1) = \Theta(n^2)$ množenj. To pa pomeni, da *uporaba Hornerjevega postopka ne reši našega problema.*

Najti moramo algoritem za konstrukcijo vrednostne predstavitve polinoma, ki bo asimptotično hitrejši od tega s Hornerjevim postopkom.

Ali tak algoritem obstaja? Da. Zdaj v zgodbo vstopi *Diskretna Fourierova transformacija* (DFT), ki skupaj z metodo *Deli in vladaj* omogoči razvoj takega algoritma. Algoritem se imenuje *Hitra Fourierova transformacija* (FFT) in ima časovno zahtevnost $\Theta(n \log n)$.

Diskretna Fourierova transformacija (DFT)

Najprej opišimo DFT v splošnem. Pri DFT igra pomembno vlogo matematična struktura imenovana vektorski prostor.

Vektorski prostor V nad obsegom $\mathbb{C}$ kompleksnih števil sestavljajo Abelova grupa $(V, +)$ *vektorjev*, obseg $(\mathbb{C}, +, *)$ *skalarjev* in *operacija* $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ množenja vektorjev s skalarji, skladna z operacijami v V in $\mathbb{C}$. *Dimenzijo* prostora V označimo z $d = \dim V$. Obseg $\mathbb{C}$ ima *enoto*, tj. skalar 1, z lastnostjo, da je $1 * \alpha = \alpha * 1 = \alpha$ za vsak skalar α.

Linearna transformacija vektorskega prostora V vase je preslikava $T : V \to V$ z lastnostjo $T(\alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{v}) = \alpha \cdot T(\mathbf{u}) + \beta \cdot T(\mathbf{v})$, za poljubna vektorja $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ in poljubna skalarja α, β.

Linearno transformacijo vektorskega prostora končne dimenzije d predstavimo z matriko reda $d \times d$. Kadar obstaja njena inverzna matrika, obstaja tudi inverzna transformacija.

Linearnih transformacij vektorskega prostora dimenzije d je veliko. Med njimi nas bo zanimala t.i. *Diskretna Fourierova Transformacija* (DFT). Ključno vlogo pri DFT bo igral *primitivni koren enote*. To je skalar ω, ki ga definirata dve lastnosti:

1. $\omega^d = 1$ — ω je *koren* enote
2. $\omega^k \neq 1$ za $k = 1, \ldots, d-1$. — ω je *primitivni* koren enote

V obsegu $\mathbb{C}$ je $\omega = e^{\iota \frac{2\pi}{d}}$, kjer je ι *imaginarna enota*.

(Imaginarno enoto bomo označili z ι, da je ne bomo zamenjevali z eksponentom i.)

Definicija. *Diskretna Fourierova transformacija* reda d je linearna transformacija prostora V dimenzije d, ki jo predstavlja matrika F reda $d \times d$ s komponentami

$$F_{ij} = \omega^{i*j} \quad , \quad 0 \leqslant i, j \leqslant d-1.$$

Inverzno DFT predstavlja matrika F^{-1} s komponentami

$$F^{-1}_{ij} = \tfrac{1}{d}\omega^{-i*j} \quad , \quad 0 \leqslant i, j \leqslant d-1.$$

(Vaja: preverite, da je $FF^{-1} = F^{-1}F = I$.)

Primer. Izračunajmo matriko F za $d = 2$. Naprej izračunamo $\omega = e^{\iota \frac{2\pi}{d}} = e^{\iota \frac{2\pi}{2}} = e^{\iota\pi} = -1$. Zato sta $\omega^0 = 1$ in $\omega^1 = -1$. Nato izračunamo vse vrednosti ω^{i*j} pri $0 \leqslant i, j \leqslant d-1$. Dobimo $\omega^{0*0} = 1$; $\omega^{0*1} = 1$; $\omega^{1*0} = 1$; $\omega^{1*1} = -1$. Torej je $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Izračunajmo še F^{-1}. Njene komponente so $F^{-1}_{ij} = \frac{1}{d}\omega^{-i*j}$. Ker so $\omega^{-0*0} = 1$; $\omega^{-0*1} = 1$; $\omega^{-1*0} = 1$; $\omega^{-1*1} = -1$, je $F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

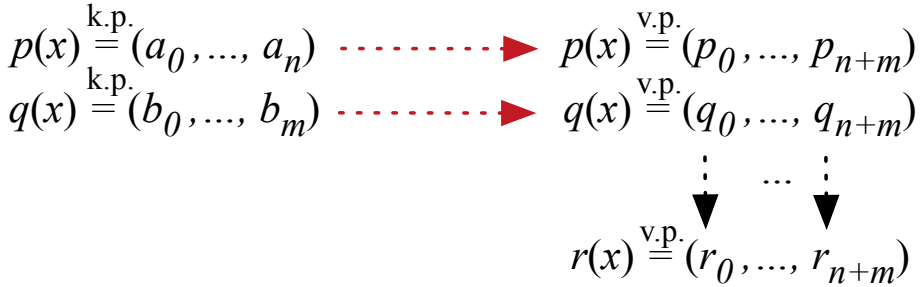
Uporaba. Vrnimo se k *pretvorbi k.p. polinoma stopnje n v v.p.* v $n+1$ točkah. Spet je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, njegova k.p. pa $(a_0, \dots a_n)$. Ker je urejena n+1-terka števil, jo lahko smatramo za *vektor* z n+1 komponentami, $\mathbf{a} = (a_0, \dots a_n)$. Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, ki vsebuje *vse* vektorje z $n+1$ komponentami. Torej je $\mathbf{a} \in V$. Izračunajmo, kam ga preslika DFT reda $d = \dim V = n+1$.

$$F\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \omega^{0*0} & \dots & \omega^{0*j} & \dots & \omega^{0*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega^{i*0} & \dots & \omega^{i*j} & \dots & \omega^{i*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega^{n*0} & \dots & \omega^{n*j} & \dots & \omega^{n*n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{0*j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{i*j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{n*j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{n} a_j (\omega^0)^j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} a_j (\omega^i)^j \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{n} a_j (\omega^n)^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\omega^0) \\ \vdots \\ p(\omega^i) \\ \vdots \\ p(\omega^n) \end{pmatrix}$$

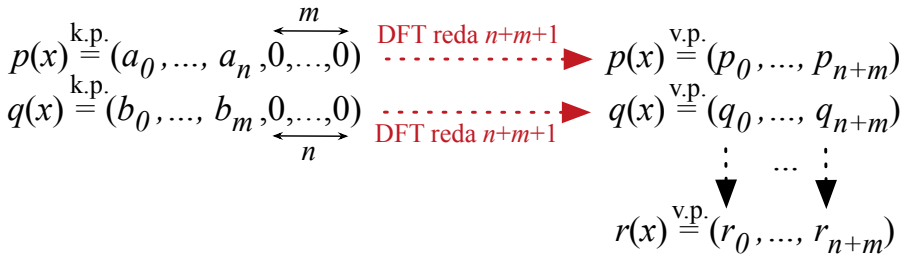
DFT reda n+1 preslika k.p. polinoma $p(x)$ stopnje n v v.p. na točkah $\omega^0, \dots, \omega^n$.
Podobno DFT reda m+1 preslika k.p. $q(x)$ stopnje m v v.p. na točkah $\omega^0, \dots, \omega^m$.

Sklep. *DFT reda* $\blacksquare$+1 *pretvori k.p. polinoma stopnje* $\blacksquare$ *v v.p. na točkah* $\omega^0, \dots, \omega^{\blacksquare}$.

Zdaj lahko dopolnimo sliko



v sliko



kjer k.p. polinoma $p(x)$ dopolnimo z m ničlami, k.p. polinoma $q(x)$ pa z n ničlami, da sta oba navidez stopnje $n+m$. Potem DFT reda $n+m+1$ vsakemu priredi njegovo v.p. na toçkah $\omega^0, \ldots, \omega^{n+m}$.

Primer. Naj bo $p(x) = 2x^3 + 2x^2 + x + 1$. Njegova k.p. je $\mathbf{a} = (1, 1, 2, 2)$. Kakšna je v.p. $\mathbf{a}'$ polinoma $p(x)$, ki jo dobimo z DFT? Računajmo. Stopnja polinoma je $n = 3$, zato bo DFT reda $d = n + 1 = 4$. Primitivni koren enote za $d = 4$ je $\omega = e^{\iota \frac{2\pi}{d}} = e^{\iota \frac{2\pi}{4}} = e^{\iota \frac{\pi}{2}} = \iota$. Fourierova matrika reda $d \times d = 4 \times 4$ je

$$F = \begin{pmatrix} \omega^{0*0} & \omega^{0*1} & \omega^{0*2} & \omega^{0*3} \\ \omega^{1*0} & \omega^{1*1} & \omega^{1*2} & \omega^{1*3} \\ \omega^{2*0} & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \omega^{2*3} \\ \omega^{3*0} & \omega^{3*1} & \omega^{3*2} & \omega^{3*3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \iota & -1 & -\iota \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\iota & -1 & \iota \end{pmatrix}.$$

K.p. $\mathbf{a}=(1,1,2,2)$ se preslika v v.p. polinoma $p(x)$ v točkah $(t_0,t_1,t_2,t_3) = (\omega^0,\omega^1,\omega^2,\omega^3) = (1,\iota,-1,-\iota)$ tako:

$$DFT(\mathbf{a}, 4) = F\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \iota & -1 & -\iota \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\iota & -1 & \iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 - \iota \\ 0 \\ -1 + \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(\iota) \\ p(-1) \\ p(-\iota) \end{pmatrix} = \mathbf{a}'.$$

Preizkusimo še inverzno DFT, ali preslika pravkar izračunano v.p. $\mathbf{a}'$ nazaj v k.p. $\mathbf{a}$. Po definiciji je

$$F^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \omega^{-0*0} & \omega^{-0*1} & \omega^{-0*2} & \omega^{-0*3} \\ \omega^{-1*0} & \omega^{-1*1} & \omega^{-1*2} & \omega^{-1*3} \\ \omega^{-2*0} & \omega^{-2*1} & \omega^{-2*2} & \omega^{-2*3} \\ \omega^{-3*0} & \omega^{-3*1} & \omega^{-3*2} & \omega^{-3*3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\iota & -1 & \iota \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \iota & -1 & -\iota \end{pmatrix}.$$

Če z F^{-1} transformiramo vrednostno predstavitev $\mathbf{a}' = (6, -1-\iota, 0, -1+\iota)$, dobimo

$$F^{-1}\mathbf{a}' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\iota & -1 & \iota \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \iota & -1 & -\iota \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1-\iota \\ 0 \\ -1+\iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}.$$

□

Primer. Naj bo $p(x) = 3x^4 + 5x^2 - 2x + 1$. V kaj se z DFT preslika njegova k.p. $\mathbf{a} = (1, -2, 5, 0, 3)$? Stopnja polinoma je $n = 4$, zato bo DFT reda $d = n + 1 = 5$. Primitivni koren enote je $\omega = e^{\iota \frac{2\pi}{d}} = e^{\iota \frac{2\pi}{5}}$. Fourierova matrika je

$$F = \begin{pmatrix} \omega^{0*0} & \omega^{0*1} & \omega^{0*2} & \omega^{0*3} & \omega^{0*4} \\ \omega^{1*0} & \omega^{1*1} & \omega^{1*2} & \omega^{1*3} & \omega^{1*4} \\ \omega^{2*0} & \omega^{2*1} & \omega^{2*2} & \omega^{2*3} & \omega^{2*4} \\ \omega^{3*0} & \omega^{3*1} & \omega^{3*2} & \omega^{3*3} & \omega^{3*4} \\ \omega^{4*0} & \omega^{4*1} & \omega^{4*2} & \omega^{4*3} & \omega^{4*4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \omega^{12} \\ 1 & \omega^4 & \omega^8 & \omega^{12} & \omega^{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^1 & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega^1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix}.$$

Koeficientna predstavitev $\mathbf{a} = (1, -2, 5, 0, 3)$ se preslika v vrednostno predstavitev $\mathbf{a}'$ polinoma v točkah $(t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) = (\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) = ((e^{\iota \frac{2\pi}{5}})^0, (e^{\iota \frac{2\pi}{5}})^1, (e^{\iota \frac{2\pi}{5}})^2, (e^{\iota \frac{2\pi}{5}})^3, (e^{\iota \frac{2\pi}{5}})^4) = (1, e^{\iota \frac{2\pi}{5}}, e^{\iota \frac{4\pi}{5}}, e^{\iota \frac{6\pi}{5}}, e^{\iota \frac{8\pi}{5}})$
$= (1, e^{\iota \frac{2\pi}{5}}, e^{\iota \frac{4\pi}{5}}, e^{-\iota \frac{\pi}{5}}, e^{-\iota \frac{3\pi}{5}})$ takole:

$$F\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^1 & \omega^3 \\ 1 & \omega^3 & \omega^1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 - 2\omega + 5\omega^2 + 3\omega^4 \\ 1 - 2\omega^2 + 5\omega^4 + 3\omega^3 \\ 1 - 2\omega^3 + 5\omega + 3\omega^2 \\ 1 - 2\omega^4 + 5\omega^3 + 3\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(\omega^0) \\ p(\omega^1) \\ p(\omega^2) \\ p(\omega^3) \\ p(\omega^4) \end{pmatrix} = \mathbf{a}'.$$

□

I. Razdelitev problema na dva podproblema

Problem $DFT(\mathbf{a}, d)$ razdelimo na dva podproblema v štirih korakih:

1. V $p(x)$ so koeficienti s sodimi in lihimi indeksi. Prvi so $a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-1}$, drugi pa $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_n$. Vsakih je r. S prvimi definirajmo polinom $p_S(x)$, z drugimi pa polinom $p_L(x)$ takole:

   $p_S(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{r-1}$ oz. $\mathbf{a}_S \stackrel{\text{def}}{=} (a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{n-1})$

   $p_L(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_n x^{r-1}$ oz. $\mathbf{a}_L \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_3, a_5, \ldots, a_n)$

   Koeficientni predstavitvi novih polinomov smo označili z $\mathbf{a}_S$ in $\mathbf{a}_L$.

2. Polinom $p(x)$ lahko izrazimo z novima polinomoma takole:

   $$p(x) = p_S(x^2) + x\, p_L(x^2).$$

3. Izraz nam pove, da lahko vrednosti $p(x)$ v d točkah $x = \omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^n$ izračunamo v dveh korakih:

   (a) Izračunamo $p_S(x^2)$ in $p_L(x^2)$ v d točkah $x^2 = (\omega^0)^2, (\omega^1)^2, \ldots, (\omega^n)^2$.

   (b) S temi vrednostmi izračunamo $p(x)$ v d točkah $x = \omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^n$.

4. Hoteli smo razdeliti problem $DFT(\mathbf{a}, d)$ v dva podproblema *iste vrste* kot $DFT(\mathbf{a}, d)$. Toda računanji vrednosti $p_S(x^2)$ in $p_L(x^2)$ v koraku 3a nista videti problema iste vrste kot $DFT(\mathbf{a}, d)$. Zakaj? Medtem ko $DFT(\mathbf{a}, d)$ sprašuje po vrednostih polinoma pri d argumentih x, podproblema sprašujeta po vrednostih polinomov pri *kvadratih* teh argumentov; kaže tudi, da podproblema ne zahtevata računanja na *manj* argumentih kot zahteva $DFT(\mathbf{a}, d)$. *Ali torej nismo razdelili* $DFT(\mathbf{a}, d)$ *v dva manjša istorodna podproblema?* Smo. Natančnejši razmislek nam bo odkril, kakšen je pravi pogled na podproblema.

a) Za poljuben naravni k velja $(\omega^{k+r})^2 = \omega^{2k}$.

Dokaz. $(\omega^{k+r})^2 = \omega^{2k}\omega^{2r} = \omega^{2k}\omega^d = \omega^{2k} \cdot 1 = \omega^{2k}$, ker je ω d-ti koren enote. □

b) Zato sta med d števili $x^2 = (\omega^0)^2, (\omega^1)^2, \ldots, (\omega^n)^2$ po dve enaki:

$$(\omega^0)^2, \ldots, \underline{(\omega^k)^2}, \ldots, (\omega^{r-1})^2, (\omega^r)^2, \ldots, \underline{(\omega^{k+r})^2}, \ldots, (\omega^n)^2.$$

Enaka števila so $(\omega^k)^2$ in $(\omega^{k+r})^2$, kjer je $k = 0, \ldots, r-1$. Ker je ω d-ti *primitivni* koren enote, so pari pri različnih vrednostih k različni. Sledi, da je med d števili $x^2 = (\omega^0)^2, (\omega^1)^2, \ldots, (\omega^n)^2$ le $d/2 = r$ paroma različnih. To pa pomeni, da bo treba v koraku 3a izračunati $p_S(x^2)$ in $p_L(x^2)$ le v r točkah $x^2 = (\omega^0)^2, \ldots, (\omega^k)^2, \ldots, (\omega^{r-1})^2$. Ker lahko eksponenta nad ω zamenjamo, so to števila

$$(\omega^2)^0, \ldots, (\omega^2)^k, \ldots, (\omega^2)^{r-1}.$$

c) Če je ω d-ti primitivni koren enote, je ω^2 r-ti primitivni koren enote.

Dokaz. ω^2 je r-ti koren: $\omega^2 = (e^{\iota \frac{2\pi}{d}})^2 = e^{2\iota \frac{2\pi}{d}} = e^{\iota \frac{2\pi}{d/2}} = e^{\iota \frac{2\pi}{r}}$. ω^2 je primitiven: Za $k = 1, \ldots, r-1$ je $(\omega^2)^k = (e^{\iota \frac{2\pi}{r}})^k = e^{\iota \frac{2\pi}{r/k}} \neq 1$, za $k = r$ pa $(\omega^2)^r = (e^{\iota \frac{2\pi}{r}})^r = 1$.□

d) Pišimo $\psi = \omega^2$. Zaradi 4b in 4c lahko korak 3a izrazimo takole:

Izračunamo $p_S(x)$ in $p_L(x)$ v r točkah $x = \psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^{r-1}$.

Če predpostavimo, da je tudi $r = \frac{d}{2}$ *sodo število*, postane jasno, da sta računanji vrednosti $p_S(x)$ in $p_L(x)$ podproblema, ki sta iste vrste kot problem računanja vrednosti $p(x)$, le da se nanašata na druga polinoma in zahtevata pol manj argumentov. Zato oba poimenujemo z istim imenom kot osnovni problem, a drugimi parametri: $DFT(\mathbf{a}_S, r)$ in $DFT(\mathbf{a}_L, r)$.

Sklep: Če je $r = \frac{d}{2}$ sod, korak 3a sestavljata problema $DFT(\mathbf{a}_S, r)$ in $DFT(\mathbf{a}_L, r)$.

(Na začetku smo predpostavili, da je d sod, zdaj pa smo predpostavili, da je sod tudi $\frac{d}{2}$. Da bo tako vse do trivialnih podproblemov, bomo morali predpostaviti, da je d potenca števila 2.)

Zdaj smo uspeli razdeliti osnovni problem $DFT(\mathbf{a}, d)$ v dva istorodna podproblema $DFT(\mathbf{a}_S, r)$ in $DFT(\mathbf{a}_L, r)$. S tem je opravljen prvi del razvoja algoritma FFT$(\mathbf{a}, d)$ z metodo *Deli in vladaj.* Kot že vemo, bo učinkovitost algoritma odvisna tudi od učinkovitosti, s katero bo sestavil rešitvi podproblemov $DFT(\mathbf{a}_S, r)$ in $DFT(\mathbf{a}_L, r)$ v rešitev problema $DFT(\mathbf{a}, d)$. Ta del algoritma opisuje naslednji razdelek.

II. Sestavljanje delnih rešitev v končno

V koraku 3b moramo iz vrednosti $p_S(\cdot)$ in $p_L(\cdot)$, ki jih izračuna korak 4d, sestaviti vse vrednosti

$$\underbrace{p(\omega^0), p(\omega^1), \ldots, p(\omega^{r-1})}_{\text{prva polovica}}, \underbrace{p(\omega^r), p(\omega^{r+1}), \ldots, p(\omega^n)}_{\text{druga polovica}}.$$

V naslednjih dveh korakih jih sestavimo takole:

5. Računanje vrednosti v *prvi polovici* poteka po enačbi iz koraka 2:

$$p(\omega^k) = p_S(\omega^{2k}) + \omega^k p_L(\omega^{2k}) = \underbrace{p_S(\psi^k)}_{A} + \omega^k \underbrace{p_L(\psi^k)}_{B}.$$

V trenutku, ko se bo računala vrednost $p(\omega^k)$, bosta vrednosti A in B že na voljo (kot rešitvi dveh podproblemov), zato bo za izračun $p(\omega^k)$ potrebno le eno množenje (z ω^k) in eno seštevanje. Za izračun *vseh* r vrednosti $p(\omega^k)$ iz prve polovice pa bo potrebnih r *množenj in* r *seštevanj.*

6. Računanje vrednosti v *drugi polovici* nas preseneti, ker zahteva le odštevanja:

$$\begin{aligned} p(\omega^{r+k}) &= p_S(\omega^{2(r+k)}) + \omega^{r+k} p_L(\omega^{2(r+k)}) = \text{/zaradi 4a} \\ &= p_S(\omega^{2k}) \quad + \omega^{r+k} p_L(\omega^{2k}) \quad = \text{/zaradi 4c} \\ &= p_S(\psi^k) \quad + \omega^{r+k} p_L(\psi^k) \quad = \text{/ker } \omega^{r+k} = -\omega^k \text{ (Dokaz:vaja.)} \\ &= p_S(\psi^k) \quad - \underbrace{\omega^k p_L(\psi^k)}_{C}. \end{aligned}$$

Ko se bo računala vrednost $p(\omega^{r+k})$, bo C že izračunan, saj se je izračunal v koraku 5. Zato bo izračun $p(\omega^{r+k})$ zahteval le eno odštevanje. Izračun *vseh* r vrednosti $p(\omega^{r+k})$ iz druge polovice pa bo zahteval r *odštevanj.*

Sklep: Korak 3b skupno zahteva $r = \frac{d}{2}$ množenj in $2r = d$ aditivnih operacij.

Algoritem FFT v psevdokodi

Zdaj lahko zapišemo algoritem FFT. Predpostavljamo, da je d potenca števila 2.
(To lahko vedno dosežemo, če vektor podaljšamo z nekaj ničelnimi komponentami.)

```
procedure FFT(a,d) return array;   |Izracunaj p = DFT(a,d)
begin
  if d=1 then return a_0
  else
    a_S := (a_0,a_2,..,a_{n-1});   |Razdeli a v a_S, a_L   (1,2,3,4)
    a_L := (a_1,a_3,..,a_n);
    p_S := FFT(a_S,d/2);           |Izracunaj p_S = DFT(a_S,d/2)
    p_L := FFT(a_L,d/2);           |Izracunaj p_L = DFT(a_L,d/2)
    for k:=0 to n do               |Sestavi p iz p_S, p_L
      omega^k := exp{i*k*2*pi/d};
      p[k] := p_S[k mod d/2] + omega^k * p_L[k mod d/2]       |(5,6)
    endfor;
    return p
  endif
end.
```

Opombe. `a_S` in `a_L` sta tabeli `a_S[0,1,..,d/2-1]` $= \mathbf{a}_S = (a_0, a_2, \ldots, a_{n-1})$ in `a_L[0,1,..,d/2-1]` $= \mathbf{a}_L = (a_1, a_3, \ldots, a_n)$ k.p. polinomov p_S in p_L. Vrednostni predstavitvi polinomov p_S in p_L sta DFT (dimenzije $\frac{d}{2} = \frac{n+1}{2}$) vektorjev $\mathbf{a}_S$ in $\mathbf{a}_L$. Vrneta ju rekurzivna klica FFT v tabelah `p_S` $=$ `p_S[0,1,..,d/2-1]` in `p_L` $=$ `p_L[0,1,..,d/2-1]` s komponentami `p_S[k]`$=p_S(\psi^k)$ in `p_L[k]` $= p_L(\psi^k)$ za $k = 0, 1, \ldots, \frac{d}{2} - 1$. Kot smo opisali v korakih 5 in 6, s temi komponentami izračunamo vrednosti $p(\omega^0), p(\omega^1), \ldots, p(\omega^n)$, ki se shranijo v tabelo `p[0,1,..,n]`. Pri tem rabimo spremenljivko `omega^k`, ki ima vrednost $\omega^k = e^{\iota \frac{2\pi}{d} k}$.

Časovna zahtevnost algoritma FFT

Naj bo $T(d)$ časovna zahtevnost algoritma FFT$(\mathbf{a}, d)$. Potem je $T(\frac{d}{2})$ časovna zahtevnost vsakega od rekurzivnih klicev FFT$(\mathbf{a}_S, d/2)$ in FFT$(\mathbf{a}_L, d/2)$. Koraki 1, 3a, 4d ter 6, 7 povejo, da je skupna časovna zahtevnost procedur *Pripravi*, *Razdeli* in *Sestavi* enaka $\Theta(d)$. Zato je časovna zahtevnost algoritma FFT$(\mathbf{a}, d)$

$$T(d) = 2T\left(\frac{d}{2}\right) + \Theta(d).$$

Glavni izrek metode Deli in vladaj nam pove, da za rešitev $T(d)$ velja

$$T(d) = \Theta(d \log d).$$

Časovno zahtevnost algoritma FFT$(\mathbf{a}, d)$ smo izrazili z d, številom komponent v k.p. polinoma. Med d in stopnjo n polinoma je zveza $d = n + 1$, zato tudi za časovno zahtevnost FFT, izraženo z n, velja $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Sklep. *Algoritem FFT izračuna DFT reda d v času $\Theta(d \log d)$.*

Uporaba

Razvili smo algoritem FFT, ki v času $\Theta(n \log n)$ pretvori k.p. polinoma stopnje n v njegovo v.p. na točkah $\omega^0, \ldots, \omega^n$, kjer je ω $(n+1)$-vi primitivni koren enote.

Zdaj lahko FFT uporabimo pri množenju polinomov $p(x)$ in $q(x)$ tako, da njuni k.p. pretvorimo v v.p. na omenjenih točkah. Ko dodamo manjkajoče vrednosti vsaki od v.p., množenje istoležnih komponent dá v.p. produkta $p(x)q(x)$.

Zdaj znamo izračunati *vrednostno predstavitev* produkta $p(x)q(x)$. Če pa potrebujemo *koeficientno predstvavljen* $p(x)q(x)$, moramo uporabiti še *inverzno* DFT.

Inverzna diskretna Fourierova transformacija ...

Naj bo $\mathbf{a}$ vektor dimenzije d. Njegova DFT je vektor $\mathbf{a}' = F\mathbf{a}$, kjer je F matrika reda $d \times d$ s komponentami $F_{i,j} = \omega^{i*j}$ ($\omega = e^{\iota \frac{2\pi}{d}}$ pa d-ti primitivni koren enote).

Zdaj pa recimo, da bi bil znan vektor $\mathbf{a}'$. Kako bi izračunali originalni vektor $\mathbf{a}$?

Ker je $\mathbf{a}' = F\mathbf{a}$, je $F^{-1}\mathbf{a}' = F^{-1}F\mathbf{a} = I\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Torej $\mathbf{a}$ dobimo, če $\mathbf{a}'$ transformiramo z F^{-1}, inverzno matriko matrike F. Pri definiciji DFT pa smo videli, da je F^{-1} matrika reda $d \times d$ s komponentami $F^{-1}_{i,j} = \frac{1}{d}\omega^{-i*j}$, torej

$$F^{-1} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \omega^{-0*0} & \cdots & \omega^{-0*j} & \cdots & \omega^{-0*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega^{-i*0} & \cdots & \omega^{-i*j} & \cdots & \omega^{-i*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega^{-n*0} & \cdots & \omega^{-n*j} & \cdots & \omega^{-n*n} \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\,G.$$

Sledi, da je $\mathbf{a} = F^{-1}\mathbf{a}' = \frac{1}{d}G\mathbf{a}'$. Torej $\mathbf{a}$ dobimo tako, da $\mathbf{a}'$ transformiramo z matriko G in dobljeni rezultat (vektor) pomnožimo z $\frac{1}{d}$.

Kakšna pa je transformacija, ki jo naredi množenje z matriko G?

Matrika G nas močno spominja na matriko F, saj se od te razlikuje le po predznaku v eksponentih komponent. Ali je transformacija z G v kakšni zvezi s transformacijo z F? Poglejmo. Če uvedemo $\tau := \omega^{-1}$, lahko G izrazimo takole:

$$G = (G_{i,j}) = (\omega^{-i*j}) = ((\omega^{-1})^{i*j}) = (\tau^{i*j}) = \begin{pmatrix} \tau^{0*0} & \cdots & \tau^{0*j} & \cdots & \tau^{0*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tau^{i*0} & \cdots & \tau^{i*j} & \cdots & \tau^{i*n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tau^{n*0} & \cdots & \tau^{n*j} & \cdots & \tau^{n*n} \end{pmatrix}.$$

Zdaj vidimo: Če bi bilo število τ d-ti primitivni koren enote, bi bila tudi G Fourierova matrika, zato bi za izračun $G\mathbf{a}'$ lahko uporabili kar algoritem FFT!

Toda, ali τ je d-ti primitivni koren enote? Poglejmo.
Da bi bil τ d-ti primitivni koren enote, bi po definiciji moralo veljati dvoje:

1. $\tau^d = 1$ — τ morabiti *koren* enote
2. $\tau^k \neq 1$ za $k = 1, \ldots, d-1$. — τ mora biti *primitivni* koren enote

Preverimo (upoštevajoč, da je $\tau = \omega^{-1}$ in ω d-ti primitivni koren enote):

1. $\tau^d = (\omega^{-1})^d = \omega^{-d} = (\omega^d)^{-1} = 1^{-1} = 1$, ker $\omega^d = 1$.
2. Za poljuben $k \in \{1, \ldots, d-1\}$ je $\tau^k = (\omega^{-1})^k = (\omega^k)^{-1} \neq 1$, ker $\omega^k \neq 1$.

Sklep: $\tau = \omega^{-1}$ je d-ti primitivni koren enote, če je ω^{-1} d-ti primitivni koren enote.

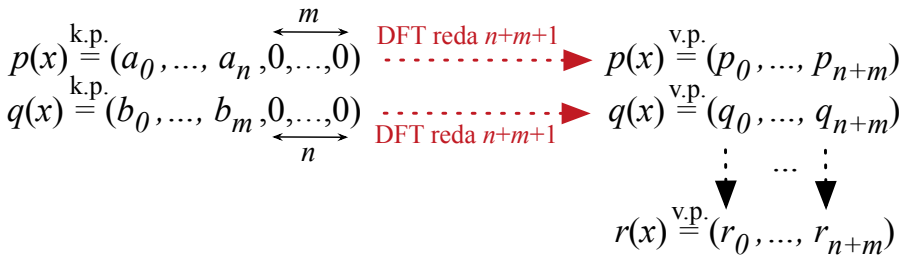
Sledi, da je G Fourierova matrika.

Zato lahko $G\mathbf{a}'$ izračunamo z algoritmom FFT, v katerem ω nadomestimo z ω^{-1} (oz. v psevdokodi FFT nadomestimo vrstico `omega^k := exp{i*k*2*pi/d}` z vrstico `omega^k := exp{-i*k*2pi/d}`). Ker iščemo vektor $\mathbf{a} = \frac{1}{d}G\mathbf{a}'$, moramo rezultat takega FFT pomnožiti še s številom $\frac{1}{d}$.

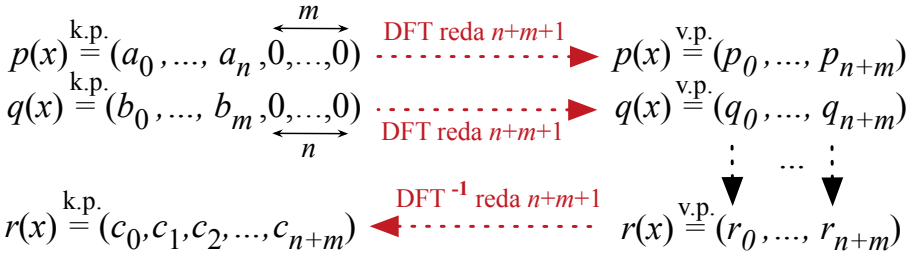
Sklep. *Inverzno DFT reda d danega vektorja izračuna prilagojeni FFT, ki ima d-ti primitivni koren enote ω zamenjan z ω^{-1}, dobljeni vektor pa pomnoži z $\frac{1}{d}$. Prilagojeni algoritem FFT izračuna inverno DFT reda d v času $\Theta(d \log d)$.*

... in njena uporaba pri množenju polinomov

Vrnimo se k sliki



Istoležne komponente vrednostnih predstavitev polinomov $p(x)$ in $q(x)$ zmnožili in dobili v.p. polinoma $r(x) = p(x)q(x)$. Na spodnji sliki pa to v.p. pretvorimo z inverzno DFT v k.p. polinoma $r(x) = p(x)q(x)$, kar je bil naš cilj.



Vsako DFT izračunamo s FFT v času $\Theta((n+m)\log(n+m))$. Množenje istoležnih komponent zahteva $\Theta(n+m)$ časa, inverzna DFT pa spet $\Theta((n+m)\log(n+m))$. Skupen čas je torej reda $\Theta((n+m)\log(n+m))$.

Sklep. *Polinoma stopenj n in m lahko zmnožimo v času $\Theta((n+m)\log(n+m))$.*

V.
Dinamično programiranje

12. Fibonaccijeva števila

Fibonaccijevo število F_n je definirano na rekurziven način takole:

$$F_n \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{če } n = 0; \\ 1 & \text{če } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{če } n \geqslant 2. \end{cases}$$

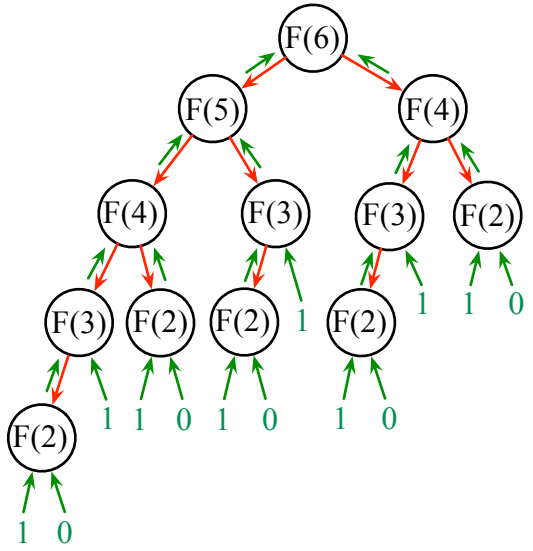
Torej sta prvi dve števili 0 in 1, vsako drugo pa vsota dveh neposrednih predhodnikov.
Tule je prvih šestnajst Fibonaccijevih števil:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

Problem: *Za dani* $n \in \mathbb{N}$ *izračunaj* F_n.

Rekurzivna definicija števila F_n nam takoj ponudi očiten algoritem za izračun F_n, ki bo rekurzivno deloval po načelu Deli in vladaj:

```
procedure F(n) return int;
begin
  if n=0 then return 0 else
  if n=1 then return 1 else
    return(F(n-1) + F(n-2))
  endif endif
end.
```



Izvajanje zgornjega algoritma pri $n = 6$ kaže drevo. Vozlišča so izvedbe procedur $F(i)$, rdeče povezave klici procedure F, zelene povezave pa posredovanja rezultatov kličočim proceduram F.

Izvedba pri $n=6$ razkrije hibo zgornjega algoritma: veliko izračunov se ponovi!

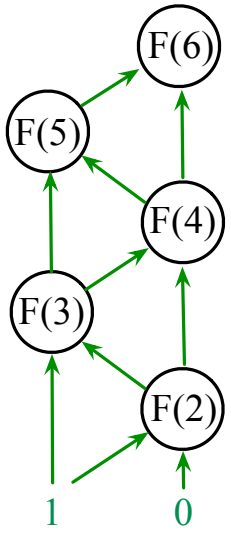
Npr. $F(4)$ se izračuna 2-krat, $F(3)$ 3-krat, $F(2)$ pa 5-krat. Splošno: pri računanju F_n se $F(k)$, $2 \leqslant k \leqslant n$, sproži $n-k+1$-krat. Če je $T(k)$ časovna zahtevnost izvedbe $F(k)$, se zaradi vseh ponovitev porabi vsaj $\sum_{k=2}^{n}(n-k)T(k) = \Omega(n^2)$ časa (v primeru, ko bi bil $T(k) = \mathcal{O}(1)$).

Opomba. V zgornjem drevesu sta nalogi „Izračunaj F_5" (v levem poddrevesu) in „Izračunaj F_4" (v desnem poddrevesu) *ločeni*, a kljub temu zahtevata rešitev *istih* nalog (tj. „IzračunajF_3" in „IzračunajF_2"). To je vzrok za ponavljanje izračunov.

Algoritem tipa Deli in vladaj zaradi zgornje hibe ni učinkovit. Hočemo boljšega.

Rekurzivna enačba za F_n nam odkrije še en očiten postopek: računanje $F(n)$ naj poteka „od spodaj navzgor", od F_0 in F_1 čez vse vmesne F_i do rezultata F_n.

```
procedure F(n) return int;
begin
  b:=1; c:=0;
  if n=0 then return c else
  if n=1 then return b else
    for i:=2 to n do
      a:=b+c; c:=b; b:=a
    endfor;
  endif endif
  retun(a)
end.
```



Izvajanje novega algoritma pri $n = 6$. Vsako vozlišče sešteje rezultata dveh predhodnikov.

Algoritem vedno sešteje zadnji Fibonaccijevi števili in zahteva $n - 1 = \Theta(n)$ korakov.

13. Metoda dinamičnega progamiranja

Pri razvoju algoritmov se rabi tudi metoda, imenovana *Dinamično programiranje*.

Bistvo metode je naslednje. *Nalogo problema P začnemo reševati tako, da najprej rešimo vse naloge tega problema, ki so trivialno velike (in zato trivialno rešljive), potem pa za poljubno netrivialno velikost n pokažemo, da se rešitev poljubne naloge te velikosti dá sestaviti iz rešitev nalog manjših velikosti (če so te naloge že rešene).*

Torej reševanje poteka ,,od spodaj navzgor", od manjših nalog proti večjim.

Ta metoda je posebej primerna, če ima reševani problem naslednje lastnosti:

- **Enostavnost podnalog.** Nalogo problema lahko sorazmerno enostavno razdelimo v istorodne podnaloge, te pa enostavno opišemo z indeksi (npr. i, j).
- **Optimalnost rešitev.** Optimalno rešitev naloge lahko sorazmerno enostavno dobimo iz optimalnih rešitev njenih podnalog (npr. z min/max, $\pm$).

  Pri tem se pogosto opremo še na *načelo optimalnosti*. Kaj pravi to načelo? Naj bo $D_1, \ldots, D_m$ zaporedje odločitev, ki jih algoritem sprejme, ko rešuje dano nalogo N. Pravimo, da je to zaporedje *optimalno*, če vodi do *optimalne rešitve* naloge N. Načelo optimalnosti pa pravi: *Vsako podzaporedje* $D_i, D_{i+1}, \ldots, D_{j-1}, D_j$ *optimalnega zaporedja* $D_1, \ldots, D_m$ *je tudi optimalno.* To pomeni, da $D_i, D_{i+1}, \ldots, D_{j-1}, D_j$ vodi od enega vmesnega rezultata do drugega optimalnega vmesnega rezultata.

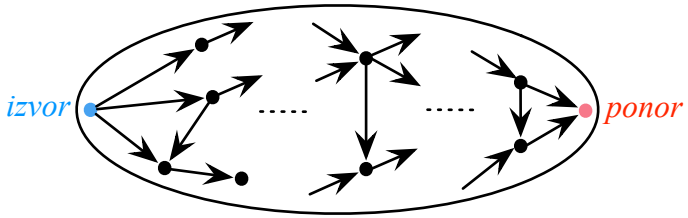
  Primer. Če najkrajšo (tj. optimalno) pot $A \rightsquigarrow B$ iz kraja A v kraj B razdelimo na dve etapi, $A \rightsquigarrow C$ in $C \rightsquigarrow B$, mora biti vsaka od etap najkrajša (optimalna) pot med svojima krajiščema: $A \rightsquigarrow C$ najkrajša iz A v C in $C \rightsquigarrow B$ najkrajša iz C v B. (Dokaz. "Č to ne bi bilo res, bi bila najkrajša neka druga etapa, denimo $A \to C$. Toda tedaj $A \rightsquigarrow B$ ne bi bila najkrajša pot iz A v B, čeprav smo predpostavili, da je!)
- **Skupne podnaloge.** Tudi če so podnaloge videti ločene, je včasih pri računanju njihovih opt. rešitev treba rešiti tudi kake skupne podnaloge.

  Pri sestavljanju rešitve naloge velikosti n se včasih rabijo le rešitve nalog velikosti $n-1$ (tj. zadnja *generacija* rešitev), včasih pa tudi rešitve nalog še manjših velikosti, tja do neke najmanjše velikosti $n-k$. (Pri Fibonaccijevih številih je bil $k = 2$.) Očitno moramo rešitve nalog zadnjih k generacij začasno hraniti, dokler jih sestavljanje novih rešitev zagotovo ne bo več potrebovalo. To vpliva na porabo pomnilnika in prostorsko zahtevnost algoritma, ki je bil razvit po metodi dinamičnega programiranja.

14. Največji pretok

Motivacija

Dano je *omrežje*, ki ga sestavljajo vozlišča in povezave med njimi. V omrežju sta dve odlikovani vozlišči, *izvor* in *ponor*. Iz izvora priteka v omrežje neka *dobrina*, ki se brez izgub razporedi in pretaka po povezavah omrežja, in ki vsa odteka skozi ponor. Če se dotok dobrine (količina dobrine v sekundi) poveča, se spremeni njen pretok po povezavah in končno poveča tudi njen odtok v ponor – a le do neke meje, saj ima vsaka povezava svojo *kapaciteto*, največji pretok, ki ga povezava še zmore. Zato obstaja neki *največji pretok* dobrine od izvora do ponora takega omrežja. Problem, ki nas bo zanimal je, da za dano omrežje izračunamo največji pretok.



Definicija problema

Omrežje je označen usmerjen graf $G(V, A, c)$. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množica vozlišč, $A \subseteq V \times V$ je množica usmerjenih povezav med vozlišči in $c : A \to \mathbb{R}_0^+$ funkcija, ki vsaki povezavi $(i, j) \in A$ priredi njeno kapaciteto $c_{i,j} \geqslant 0$. Vozlišče 1 je izvor, vozlišče n pa ponor omrežja. Iz izvora priteka dobrina s hitrostjo v $[\frac{\text{enota}}{\text{s}}]$, ki se razporedi po povezavah omrežja in odteka v ponor. Če označimo z $v_{i,j}$ pretok dobrine po povezavi (i, j), mora veljati

(1) $0 \leqslant v_{i,j} \leqslant c_{i,j}$ ... pretok čez povezavo je med 0 in kapaciteto povezave;

(2) $$\sum_i v_{i,k} - \sum_j v_{k,j} = \begin{cases} -v & \text{če } k = 1; \quad // \text{ v 1 priteka 0 in odteka } v \ [\frac{\text{enota}}{\text{s}}]; \\ 0 & \text{če } k \neq 1, n; \quad // \text{ kar v } k \text{ priteka, iz } k \text{ tudi odteka;} \\ v & \text{če } k = n; \quad // \text{ v } n \text{ priteka } v \text{ in odteka 0 } [\frac{\text{enota}}{\text{s}}]. \end{cases}$$

Količina v je *trenutni pretok* skozi omrežje, množica $\{v_{i,j}\}$ pa *razporeditev* trenutnega pretoka v po povezavah omrežja.

Velikost $v > 0$ dotoka dobrine v omrežje lahko zmanjšamo na velikost $v' < v$. Zmanjšani dotok se bo samodejno prerazporedil po povezavah, tako da bo nova razporeditev $\{v'_{i,j}\}$ izpolnjevala zgornji zahtevi (1) in (2). *Kaj pa obrnjeno?* Ali lahko najdemo razporeditev $\{v''_{i,j}\}$, ki bo izpolnila (1) in (2), in bo $v'' > v$? Torej, ali lahko povečamo trenutni pretok v skozi omrežje G? Opazimo, da pretok ne more biti večji od $\sum_j c_{1,j}$, zato je to neka zgornja meja za velikost pretoka skozi G. To pa pomeni, da obstaja tudi *najmajša zgornja meja* za velikost pretoka skozi G.

Problem: *Za omrežje $G(V, A, c)$ izračunaj najmanjšo zgornjo mejo v^* velikosti pretoka skozi omrežje in razporeditev $\{v^*_{i,j}\}$ pretoka v^* po povezavah omrežja.*

Naivni algorithm

Najprej se lotimo reševanja problema s pojmom *prereza* grafa, ki ga je tudi sicer koristno poznati. Izkazalo se bo, da nas to vodi do algoritma z eksponentno časovno zahtevnostjo, kar je preveč.

Definirajmo pojme, ki jih bomo rabili. Paru (S, T) rečemo $(1, n)$-*prerez* omrežja $G(V, A, c)$, če je $S \cup T = V$ in $S \cap T = \emptyset$ ter $1 \in S$ in $n \in T$. Torej množico V *razdelimo* v disjunktni množici S in T tako, da je izvor v S, ponor pa v T. *Kapaciteta* $c(S, T)$ tega prereza je vsota kapacitet vseh povezav, ki vodijo iz S v T,

$$c(S, T) \stackrel{def}{=} \sum_{i \in S, j \in T} c_{i,j}.$$

Intuitivno: iz S v T se lahko pretaka *kvečjemu* $c(S, T)$ enot dobrine na sekundo. Torej lahko izvor pošilja dobrino v omrežje s hitrostjo v, kjer je $v \leqslant c(S, T)$.

V splošnem ima G več $(1, n)$-prerezov, zato bo tisti, ki ima najmanjšo kapaciteto, določal največi pretok v^* skozi G. Ugotovili smo, *kaj* je rešitev v^*:

$$v^* = \min_{(S,T)} c(S, T).$$

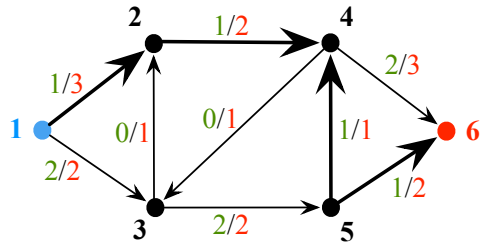
Poglejmo še, *kako* bi izračunali v^* iz te enačbe.

Izračunati moramo kapacitete vseh $(1, n)$-prerezov grafa G in izbrati najmanjšo med njimi. Vseh $(1, n)$-prerezov (S, T) grafa G je toliko kot podmnožic $S \subseteq V$, ki vsebujejo 1 ne pa n. Teh podmnožic je 2^{n-2}. (Izpeljite.) Zato je časovna zahtevnost takega računanja v^* reda $\Theta(2^n)$, torej eksponentna!

Poiskati bo treba hitrejši algoritem.

Ford-Fulkersonov algoritem

Zamisel opišimo na primeru omrežja na spodnji sliki.



Temeljna pot iz izvora v ponor nima ciklov, smeri povezav na njej pa so zanemarjene. Odebeljene povezave sestavljajo temeljno pot. Vsaka povezava (i, j) ima oznako $v_{i,j}/c_{i,j}$.

Izberimo *temeljno pot* P, npr. $P \equiv 1 \overset{1/3}{\rightarrow} 2 \overset{1/2}{\rightarrow} 4 \overset{1/1}{\leftarrow} 5 \overset{1/2}{\rightarrow} 6$ in poskušajmo povečati pretok čez njo. Pri tem zanemarimo vsa vozlišča in povezave izven P.

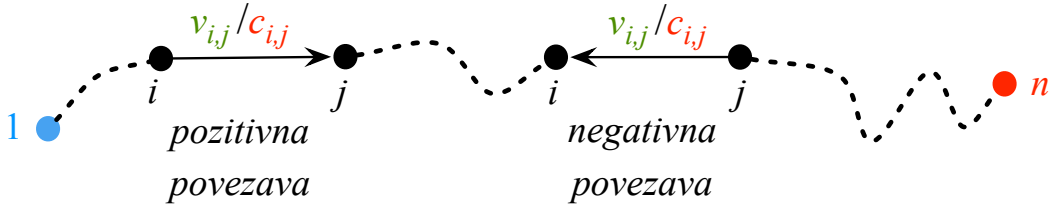
Povečajmo pretok $v_{1,2} = 1$ na 2. (To se da, ker je $c_{1,2} = 3$.) Ker zdaj v 2 doteka za 1 večji tok, bi moral iz 2 odtekati za 1 večji tok. Zato moramo povečati $v_{2,4} = 1$ na 2. (To se da, ker je $c_{2,4} = 2$.) Zdaj v 4 doteka za 1 večji tok, zato bi moral iz 4 proti 5 odtekati za 1 večji tok. Toda trenutni tok med 4 in 5 je usmerjen proti 4. Zato pretok $v_{5,4} = 1$ *zmanjšamo* za 1 na 0. (To smemo, saj je pretok lahko 0.) Ker zdaj iz 5 proti 4 teče za 1 manjši tok, moramo za 1 povečati tok iz 5 proti 6, tj. povečati $v_{5,6} = 1$ na 2. (To se da, ker je $c_{5,6} = 2$.) Ker je 6 ponor, nam je uspelo povečati pretok čez P za 1.

Z novimi pretoki v povezavah je $P \equiv 1 \overset{2/3}{\rightarrow} 2 \overset{2/2}{\rightarrow} 4 \overset{0/1}{\leftarrow} 5 \overset{2/2}{\rightarrow} 6$.

Povzemimo: povečanje pretoka po prvi povezavi izbrane temeljne poti P je zahtevalo spremembe pretokov na vseh naslednjih povezavah na P. Vse te zahteve so izvirale iz pogoja, da mora iz vozlišča odtekati toliko dobrine kolikor je vanj doteka. Zato je bilo treba povečati odtekanje iz vozlišča (a ne preko kapacitete povezave) ali pa – če je bila povezava usmerjena nasprotno od ponora – zmanjšati dotekanje v vozlišče (a ne pod 0). Ker smo lahko vse spremembe uresničili, smo pretok čez P uspeli povečati.

Opišimo zamisel bolj natančno in splošno. Najprej nekaj definicij.

Predpostavimo, da je v omrežju $G(V, A, c)$ vsako vozlišče na neki temeljni poti (tako je v realnih omrežjih) in da so vsi $c_{i,j} \in \mathbb{N}$ (to prepreči patološke primere). Naj bo P temeljna pot v omrežju $G(V, A, c)$. Povezava (i, j) na P je *pozitivna*, če na poti P kaže v smeri od izvora proti ponoru; sicer je (i, j) na poti P *negativna*.



Temeljna pot v omrežju. Vsaka povezava na njej je pozitivna ali negativna. Pozitivna povezava je zasičena, če je pretok čez njo dosegel njeno kapaciteto; negativna povezava pa je zasičena, če je pretok čez njo padel na 0. Cela pot je zasičena, če je na njej vsaj ena zasičena povezava.

Množico vseh pozitivnih povezav na poti P označimo s P^+, množico vseh negativnih povezav na poti P pa s P^-. Povezava $(i, j) \in P^+$ je *zasičena*, če je $v_{i,j} = c_{i,j}$; povezava $(i, j) \in P^-$ pa je *zasičena*, če je $v_{i,j} = 0$. Temeljna pot P je *zasičena*, če vsebuje vsaj eno zasičeno povezavo.

Sledi, da pretoka čez zasičeno temeljno pot P ne moremo povečati (saj je pretok v vsaj eni pozitivni povezavi na P dosegel kapaciteto povezave, ali pa je v vsaj eni negativni povezavi na P padel na 0.) Povedano drugače: P *ni zasičena*, če za *vsako* $(i,j) \in P^+$ velja $v_{i,j} < c_{i,j}$ *in* če za *vsako* $(i,j) \in P^-$ velja $v_{i,j} > 0$.

Zamisel algoritma

Zdaj se nam utrne zamisel algoritma: *po vrsti zasiti vse nezasičene temeljne poti.* V $G(V,A,c)$ je končno mnogo nezasičenih temeljnih poti. Ker so kapacitete povezav naravna števila, moramo pretok čez nezasičeno temeljno pot povečati za neko *naravno število*, da jo zasitimo. Sledi, da bo algoritem zasitil vse in se ustavil. Zamisel pa takoj sproži tudi nekaj praktičnih vprašanj:

1. Ali je pretok čez $G(V,A,v)$ največji, če so vse temeljne poti zasičene?
2. Kako v $G(V,A,v)$ najdemo nezasičeno temeljno pot?
3. Kako nezasičeno temeljno pot zasitimo?
4. Za koliko se poveča pretok čez nezasičeno temeljno pot, če pot zasitimo?

Začnimo z odgovorom na vprašanje 4.

Na povečanje pretoka čez nezasičeno pot P vplivajo njene pozitivne in negativne povezave. Pretok v $(i,j) \in P^+$ se lahko poveča za največ $c_{i,j} - v_{i,j}$, zato je lahko povečanje pretoka čez P po zaslugi P^+ največ $\min_{(i,j)\in P^+}\{c_{i,j} - v_{i,j}\}$. Pretok v $(i,j) \in P^-$ pa se lahko zmanjša za kvečjemu $v_{i,j}$, zato je lahko povečanje pretoka čez P po zaslugi P^- kvečjemu $\min_{(i,j)\in P^-}\{v_{i,j}\}$. Sledi, da temeljno pot P zasitimo natanko tedaj, ko povečamo pretok čez njo za

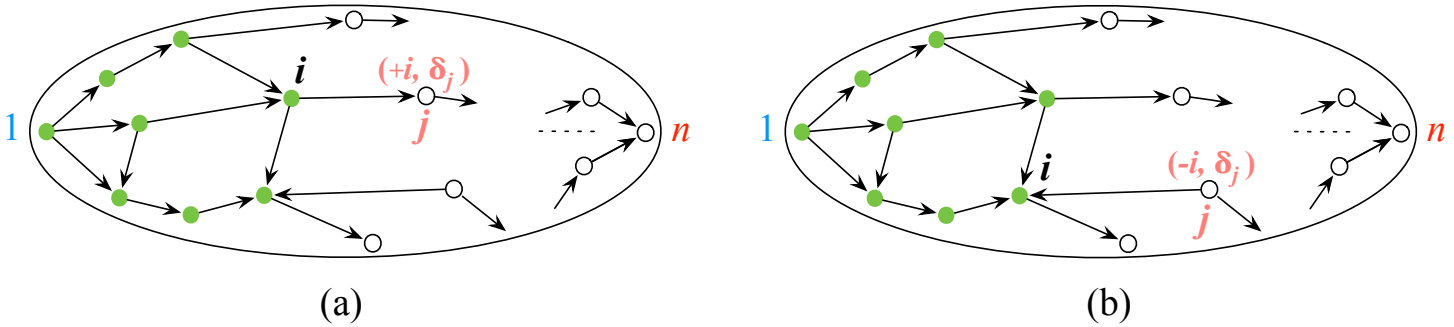
$$\min\Big\{ \min_{(i,j)\in P^+}\{c_{i,j} - v_{i,j}\}, \min_{(i,j)\in P^-}\{v_{i,j}\}\Big\}. \qquad (*)$$

V nadaljevanju odgovorimo hkrati na vprašanji 2 in 3.

Zamislimo si metodo, s katero bomo poiskali in zasitili neko nezasičeno temeljno pot v $G(V,A,c)$. Iskanje naj se začne v izvoru omrežja. Od tam naj postopno prodira v omrežje tako, da obišče čedalje več vozlišč, dokler ne doseže ponora. Pri tem naj vsako *obiskano vozlišče* ustrezno označi. Označevanje naj bo tako: *oznake obiskanih vozlišč naj bodo take, da bo* (*po tem, ko bo dosežen ponor*) *možno* (*i*) *iz njih izslediti neko nezasičeno temeljno pot* P *in* (*ii*) P *zasititi.*

Izvedbo teh zamisli opisujejo naslednje točke:

- *Oznake vozlišč.* Opišimo oznake, ki naj jih nosijo označena vozlišča. Naj bo i označeno vozlišče, j pa neoznačen sosed. Kakšno oznako naj dobi j? Oznaka naj bo odvisna od smeri povezave med i in j: če je $(i, j) \in A$, naj j dobi oznako $(+i, \delta_j)$, če pa je $(j, i) \in A$, naj j dobi oznako $(-i, \delta_j)$.



Označena vozlišča (zelena) in neoznačena vozlišča (bela). Dodelitev oznake neoznačenemu vozlišču j, ki je sosed nepregledanega vozlišča i: (a) če gre povezava iz i v j; (b) če gre povezava iz j v i.

- *Pomen in namen oznak.* Kakšen pomen in namen ima oznaka vozlišča j? Prva komponeneta oznake vozlišča j bo omogočila, da izsledimo predhodnika vozlišča j (torej točko i) na nezasičeni temeljni poti (po tem, ko bo pri prodiranju skozi G dosežen ponor in iz katerega se bo pri vračanju proti izvoru rekonstruirala ta pot). Druga komponenta oznake vozlišča j bo povedala, da se dá pretok čez pot $1 \to \cdots \to i \to j$ povečati za največ δ_j. Zato to komponento definiramo kot

$$\delta_j \stackrel{def}{=} \begin{cases} \min\{\delta_i, c_{i,j} - v_{i,j}\} & \text{če } (i,j) \in A; \\ \min\{\delta_i, v_{j,i}\} & \text{če } (j,i) \in A. \end{cases}$$

  S tako definiranim δ_j lahko med prodiranjem skozi G sproti računamo vrednost izraza $(*)$. (Vidimo, da mora izvor dobiti oznako $(\uparrow, \infty)$.)

- *Potek označevanja.* Med prodiranjem skozi omrežje bo v vsakem trenutku nekaj vozlišč že *označenih* in nekaj še *neoznačenih.* Med označenimi bodo nekatera imela vse svoje sosede že označene, pri drugih pa bo vsaj en sosed še neoznačen. Prvim bomo rekli *pregledana*, drugim pa *nepregledana.* Na začetku bo izvor označen a nepregledan, ostala vozlišča pa neoznačena. Med prodiranjem skozi omrežje bomo ponavljali naslednje:
  (a) izberi nepregledano vozlišče i;
  (b) označi kakega neoznačenega soseda j (kot je opisano zgoraj);
  (c) razglasi j za označenega in nepregledanega;
  (d) razglasi i za pregledanega, če je bil j njegov zadnji neoznačeni sosed.

- *Izsleditev poti.* Ko je pri prodiranju skozi omrežje $G(V, A, c)$ dosežen in označen ponor n, je njegova oznaka $(+j, \delta_n)$ ali $(-j, \delta_n)$, kjer je $j \in V$. Če je $\delta_n > 0$, to pomeni, da *obstaja* nezasičena temeljna pot P, ki se jo dá zasititi, če pretok čez njo povečamo za δ_n. Katera pa je ta temeljna pot P, čez katera vozlišča poteka? Iz oznake ponora n vidimo, da je predzadnje vozlišče na njej vozlišče j. To nam pove, da je $P \equiv 1 \leftrightsquigarrow j, n$. (Če je $(j, n) \in A$, je $P \equiv 1 \leftrightsquigarrow j \rightarrow n$, če pa je $(n, j) \in A$, je $P \equiv 1 \leftrightsquigarrow j \leftarrow n$.) Tudi vozlišče j ima oznako, ki je bodisi $(+i, \delta_j)$ ali $(-i, \delta_j)$, kjer je $i \in V$. Zato je $P \equiv 1 \leftrightsquigarrow i, j, n$. Tako enega za drugim izsledimo še vsa ostala vozlišča na poti P in smeri povezav med njimi. Skratka, če je $\delta_n > 0$, lahko rekonstruiramo temeljno pot, ki jo lahko zasitimo s povečanjem pretoka za δ_n.

- *Zasičenje poti.* Kako zasitimo temeljno pot P, odkrito v prejšnji točki? Enostavno: vsaki pozitivni povezavi na poti P povečamo njen pretok za δ_n, vsaki negativni povezavi na P pa zmanjšamo njen pretok za δ_n. (To bi lahko sproti počeli že v prejšnji točki po vsaki izsleditvi prejšnjega vozlišča.)
- *Ponovitev.* Ko zasitimo rekonstruirano temeljno pot P, se pretok čez omrežje poveča za δ_n. Kljub temu lahko obstaja še kaka nezasičena temeljna pot. Da jo odkrijemo, moramo ponoviti cel postopek označevanja. Seveda moramo pred tem izbrisati oznake vseh vozlišč razen izvora.
- *Konec.* Algoritem se konča, ko pri nekem pretoku v^* čez $G(V, A, c)$ v omrežju ni več nezasičenih temeljnih poti, tj. ko označevanje vrne $\delta_n = 0$.

Časovna zahtevnost

Naj bo v^* največji pretok čez $G(V, A, c)$. Da Ford-Fulkersonov algoritem izračuna v^*, mora zasititi kvečjemu v^* temeljnih poti, saj vsako zasičnje temeljne poti poveča pretok čez $G(V, A, c)$ za vsaj 1. Vsaka temeljna pot ima kvečjemu $|A|$ povezav, zato označitev, izsleditev in zasičenje temeljne poti zahtevajo $\mathcal{O}(|A|)$ časa. Sledi, da je časovna zahtevnost Ford-Fulkersonovega algoritma reda

$$\mathcal{O}(v^*|A|).$$

Toda ni nam věč, da je časovna zahtevnost računanja rezultata v^* odvisna prav od tega rezultata; poleg tega je lahko v^* zelo velik. Edmonds in Karp sta to slabost odpravila z naslednjim enostavnim dopolnilom v poteku označevanja: *vozlišča naj postanejo pregledana v istem vrstnem redu kot so postala označena.* Tako popravljeni algoritem ima časovno zahtevnost

$$\mathcal{O}(|V|\cdot|A|^2).$$

Izboljšani algoritmi

Problem največjega pretoka je pomemben, zato je bil in je še vedno predmet mnogih raziskav. Tule je seznam izboljšav Ford-Fulkersonovega algoritma in drugih algoritmov za ta problem, skupaj z njihovimi časovnimi zahtevnostmi v odvisnosti od $n = |V|$ in $m = |A|$ (posebej je $U \approx v^*$):

$\mathcal{O}(v^* m)$	1956	Ford, Fulkerson
$\mathcal{O}(m^2 n)$	1969	Edmonds, Karp
$\mathcal{O}(mn^2)$	1970	Dinitz
$\mathcal{O}(n^3)$	1973	Karzanov
$\mathcal{O}(\sqrt{m} n^2)$	1976	Cherkassky
$\mathcal{O}(n^3)$	1978	Malhotra, Kumar, Maheshwari
$\mathcal{O}(m^{2/3} n^{5/3})$	1978	Galil
$\mathcal{O}(mn \log^2 n)$	1979	Galil, Naamad
$\mathcal{O}(mn \log n)$	1980	Sleator, Tarjan
$\mathcal{O}(mn \log(n^2/m))$	1985	Goldberg, Tarjan
$\mathcal{O}(mn \log_{\frac{m}{n \log n}} n)$	1994	King, Rao, Tarjan
$\mathcal{O}(m \min(n^{2/3}, m^{1/2}) \log \frac{n^2}{m} \log U)$	1998	Goldberg, Rao
$\mathcal{O}(mn)$	2013	Orlin

15. Nahrbtnik

Problem: Dana je množica $R = \{1, 2, \ldots, n\}$ z elementi, ki predstavljajo neke *reči*, ter funkciji $v : R \to \mathbb{N}$ in $t : R \to \mathbb{N}$, ki vsaki reči i priredita *vrednost* $v(i)$ in *težo* $t(i)$. (Krajše: $v_i := v(i)$ in $t_i := t(i)$.) Dano je tudi število $a \in \mathbb{N}$, ki predstavlja *nosilnost nahrbtnika*. Naloga je naslednja:

Poišči podmnožico $P \subseteq R$, imenovano *plen*, za katero bo veljalo

$$\sum_{i \in P} t_i \leqslant a \quad (\textit{plen ni pretežek})$$

in ki bo maksimirala vsoto

$$\sum_{i \in P} v_i \quad (\textit{plen je najvrednejši}).$$

Ta problem se imenuje *Problem nahrbtnika* (krajše NAHRBTNIK) in je NP-težek. Zato verjetno ne bi uspeli zasnovati algoritma, ki bi problem rešil v *polinomsko* omejenem času glede na velikost primerka problema. Nič pa nam ne brani iskati algoritma, ki bo vedno vrnil rešitev ne glede na potreben čas.

Zamisel algoritma

Naj bo $V = \sum_{i \in R} v_i$ skupna vrednost vseh reči v množici R. Izberimo poljuben $v \in \{0, 1, \ldots, V\}$. (Izbrani v je vrednost, ki je smiselna za pomnožice $P \subseteq R$. števila, ki so manjša od 0 ali večja od V ali necela, niso vrednosti kake $P \subseteq R$.)

Naj bo $i \in R$ poljubna reč. Definirajmo R_i kot množico *prvih i reči* množice R, tj. $R_i = \{1, \ldots, i\}$. Množica R_i ima svoje podmnožice, vsaka od njih pa svojo vrednost in težo. Osredotočimo se na tiste podmnožice množice R_i, ki so težke kvečjemu a. Lahko se zgodi, da med njimi ni nobene, ki bi bila vredna v (ki je bil izbran zgoraj). Seveda pa se lahko tudi zgodi, da je med njimi *vsaj ena*, ki je vredna v – in tedaj je (vsaj) ena med njimi najlažja. To podmnožico označimo z $N_i(v)$. Strogo jo definiramo takole:

$$N_i(v) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \textit{najlažja med podmnožicami množice } R_i, \\ \textit{ki so vredne } v \textit{ in težke kvečjemu } a & \text{če taka obstaja;} \\ \uparrow (\textit{nedefinirano}) & \text{če take ni.} \end{cases}$$

Kako naj uporabimo to nenavadno množico pri reševanju problema nahrbtnika?

Ideja je tale: po vrsti računaj množice $N_n(V), N_n(V-1), N_n(V-2), \ldots$ in končaj pri prvi, ki je definirana. Če je to množica $N_n(V-m)$, kjer je $0 \leqslant m \leqslant V$, velja $N_n(V)\uparrow, N_n(V-1)\uparrow, N_n(V-2)\uparrow, \ldots, N_n(V-m+1)\uparrow$ in $N_n(V-m)\downarrow$.

Intuitivno: algoritem zmanjšuje želeno vrednosti plena, dokler ne najde plena, ki se da odnesti. Očitno je vrednost $V-m$ maksimalna vrednost v^* plena, ki se ga da odnesti, množica $N_n(V-m)$ pa iskana množica P.

Naslednje vprašanje je, kako izračunati množico $N_n(\cdot)$ pri danem argumentu $\cdot$.

Smiselno bi bilo, da poskušamo izraziti $N_i(\cdot)$ z eno ali več ,,manjšimi" množicami enake vrste, tj. množicami $N_{i-1}(\cdot), N_{i-2}(\cdot), \ldots, N_{i-k}(\cdot)$ za neki k. Ta zamisel računanja ,,od zgoraj navzdol" bi nas vodila k rekurzivnemu algoritmu vrste *deli in vladaj* za izračun množic $N_n(\cdot)$.

Računanja množic $N_n(\cdot)$ pa bi se lahko lotili tudi od ,,spodaj navzgor", tj. tako, da bi iz že izračunanih množic $N_{i-1}(\cdot), N_{i-2}(\cdot), \ldots, N_{i-k}(\cdot)$ (za neki k) računali množice $N_i(\cdot)$. To bi bilo računanje množic $N_n(\cdot)$ po metodi *dinamičnega programiranja.* Prav to bomo uporabili v naslednjem razdelku (tam bo $k = 1$).

Pri obeh metodah moramo odkriti zvezo (*Kakšno?*) – če ta sploh obstaja – med rešitvijo naloge velikosti i in rešitvami nekaterih (*Katerih?*) nalog velikosti $i-1, \ldots, i-k$ za neki (*Kateri?*) k $(1 \leqslant k \leqslant i)$.

Prav to je pogosto težko, ker zahteva kreativnost, inspiracijo, uvid in eksaktno dedukcijo, torej *naravno* inteligenco.

Algoritem z dinamičnim programiranjem

Naš cilj je izraziti množico $N_i(v)$ z eno ali več množicami $N_{i-1}(\cdot)$.
Če nam bo uspelo, bomo izrazili tudi težo $T_i(v)$ množice $N_i(v)$ s težami $T_{i-1}(\cdot)$.

Cilj bomo poskušali doseči na induktiven način: najprej bomo raziskali trivialne množice $N_1(\cdot)$ in njihove teže $T_1(\cdot)$, potem pa razmišljali, kakšna bi utegnila biti zveza med $N_i(v)$ in množicami $N_{i-1}(\cdot)$.
Če bomo kako zvezo našli, nas bo morda vodila še do zveze med $T_i(v)$ in $T_{i-1}(\cdot)$.

Zdaj pa začnimo:

$\boxed{i = 1}$

Opravka imamo z množico $R_1 = \{1\}$. Njeni podmnožici sta dve: $\emptyset$ in $\{1\}$. Vrednost prve je 0, druge pa v_1. Torej so množice $N_1(\cdot)$ naslednje:

$N_1(0) = \emptyset$ ker je $\emptyset$ edina podmnožica R_1, vredna 0;
$N_1(v_1) = \{1\}$ ker je $\{1\}$ edina podmnožica R_1, vredna v_1;
za $v \neq 0, v_1$ je $N_1(v)\uparrow$ ker R_1 nima podmnožic, vrednih v.

Njihove teže so

$T_1(0) = 0$;
$T_1(v_1) = t_1$;
za $v \neq 0, v_1$ je $T_1(v)\uparrow$.

$\boxed{i \geqslant 2}$

Zdaj je $R_i = \{1, \ldots, i\}$. *Ko bo* $N_i(v)$ *izračunana*, bo bodisi vsebovala element i ali pa ga ne bo vsebovala. Poglejmo vsako možnost podrobno.

$\boxed{i \in N_i(v)}$

V tem primeru bo $N_i(v)$ sestavljena iz $\{i\}$ in (načelo optimalnosti!) najlažje podmnožice množice R_{i-1}, ki je vredna $v - v_i$; torej bo

$$N_i(v) = \{i\} \cup N_{i-1}(v - v_i). \qquad (*)$$

Teža te množice bo

$$T_i(v) = t_i + T_{i-1}(v - v_i).$$

To bo veljalo, če so bili $v - v_i \geqslant 0$, $N_{i-1}(v - v_i)\!\downarrow$ in $t_i + T_{i-1}(v - v_i) \leqslant a$.

$\boxed{i \notin N_i(v)}$

V tem primeru bo očitno

$$N_i(v) = N_{i-1}(v) \qquad (**)$$

in

$$T_i(v) = T_{i-1}(v).$$

Toda za $N_i(v)$ je morala biti izbrana lažja od alternativnih $N_i(v)$ v $(*)$ in $(**)$, sicer končni $N_i(v)$ ne bi bil skladen s svojo definicijo. Zato je $N_i(v)$ težka

$$T_i(v) = \min\bigl\{t_i + T_{i-1}(v - v_i),\ T_{i-1}(v)\bigr\}.$$

Po tem razmisleku se algoritem za reševanje problema NAHRBTNIK glasi:

```
procedure Nahrbtnik(R,t,v,a) return P;
begin
  Izracunaj V;
  for v := 0 to V do                          //trivialne naloge
    N_1(v) := nedefinirano; T_1(v) := nedefinirano;
  endfor;
  N_1(0) := praznamnozica; T_(0) := 0;
  N_1(v_1) := {1}; T_1(v_1) := t_1;
  for i:= 2 to n do                          //netrivialne naloge
    for v := 0 to V do
      if v-v_i >= 0
         and N_{i-1}(v-v_i) definirana
         and t_i + T_{i-1}(v-v_i) <= a
         and t_i + T_{i-1}(v-v_i) <= T_{i-1}(v)
      then
        begin
          N_i(v) := {i} U N_{i-1}(v-v_i);
          T_i(v) := t_i + T_{i-1}(v-v_i)
        end
      else
        begin
          N_i(v) := N_{i-1}(v);
          T_i(v) := T_{i-1}(v)
        end
    endfor
  endfor;
  v* := najvecji v, pri katerem je N_n(v) definirana;
  P := N_n(v*)
end.
```

Časovna zahtevnost algoritma

Časovno zahtevnost algoritma narekuje dvojna zanka `for i...for v`. Ostali deli algoritma imajo časovno zahtevnost $\mathcal{O}(1)$. Telo dvojne zanke zahteva $\mathcal{O}(1)$ operacij, izvede pa se $(n-1)(V+1)$-krat. Zato je časovna zahtevnost celega algoritma $\mathcal{O}(nV)$.

Časovna zahtevnost algoritma je polinomsko odvisna tako od n kot od V. Ali naš algoritem reši NP-težek problem NAHRBTNIK v polinomskem času?

Ne. Časovna zahtevnost je definirana kot funkcija *dolžine* vhodnih podatkov (tj. velikosti prostora zanje), ne pa njihove *velikosti* (magnitude). V izrazu $\mathcal{O}(nV)$ je V velikost vhodnih podatkov. Če V izrazimo z njegovo dolžino $d = \lceil \log V \rceil$, je časovna zahtevnost algoritma $\mathcal{O}(n2^d)$, torej *eksponentno* odvisna od dolžine vhodnih podatkov.

16. Najcenejše poti iz izhodišča

Definicija problema

Dan je utežen usmerjen graf $G(V, A, c)$, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč, $A \subseteq V \times V$ množica usmerjenih povezav med vozlišči in $c : V \times V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcija, ki vsakemu paru $(i, j) \in V \times V$ priredi njegovo *ceno* $c_{i,j}$. Za vsak $i \in V$ je $c_{i,i} = 0$ in $c_{i,j} = \infty \iff (i, j) \notin A$. Usmerjena pot iz vozlišča $i_z \in V$ v $i_k \in V$ je zaporedje vozlišč $i_1, i_2, \ldots, i_\ell$, $\ell \geqslant 2$, kjer je $i_1 = i_z$ in $i_\ell = i_k$ ter $(i_j, i_{j+1}) \in A$ za $j = 1, \ldots \ell - 1$. Cena u_{i_z,i_k} te poti je vsota cen njenih povezav,

$$u_{i_z,i_k} = \sum_{j=1}^{j=\ell-1} c_{i_j,i_{j+1}}.$$

Cikel je usmerjena pot iz i_z v i_k, ki se konča v začetnem vozlišču, torej $i_z = i_k$. Cikel *negativen*, če je njegova cena negativno število. Vozlišču 1 rečemo *izhodišče.*

Problem: *Za vsako vozlišče $i \in V$ poišči najcenejšo pot iz 1 v i in njeno ceno $u_{1,i}$.*

Včasih ta problem ni rešljiv. To se zgodi, če iz izhodišča do nekega vozlišča ni usmerjene poti (zaradi nepovezanosti grafa ali pa zaradi smeri povezav.) Drugi razlog je obstoj negativnih ciklov.

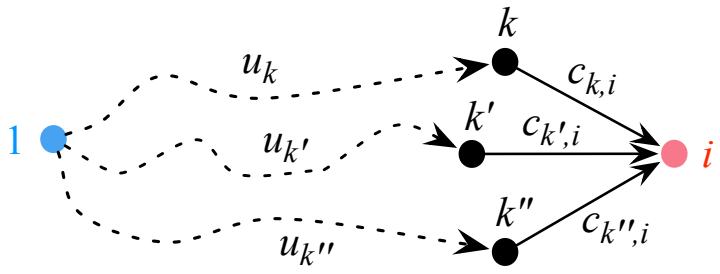
Zakaj? Naj bo $i_z \rightsquigarrow i_k$ $(i_k = i_z)$ negativen cikel v G in $c_{i_z,i_k} \in \mathbb{R}^-$ njegova cena. Kakšna je najcenejša pot iz 1 v vozlišče i_z? Denimo, da je to pot $1 = i_1, i_2, \ldots, i_z$ s ceno u_{1,i_z}. če bi to pot podaljšali z negativnim ciklom $i_z \rightsquigarrow i_k (= i_z)$, bi bila cena podaljšane poti $u_{1,i_z} + c_{i_z,i_k} < u_{1,i_z}$, saj je $c_{i_z,i_k} < 0$. Zato $1 = i_1, i_2, \ldots, i_z$ ne bi bila najcenejša pot iz 1 v i_z, čeprav smo predpostavili, da je! Tudi če bi si premislili in rekli, da je podaljšana pot najcenejša, bi tudi njej lahko dodali še en obhod negativnega cikla. Ker bi lahko cikel obhodili poljubno mnogokrat, bi lahko ceno poti iz 1 v i_z v nedogled zmanjševali. Sklenemo lahko, da ne obstaja najcenejša pot iz 1 v i_z.

Zato bomo odslej predpostavljali, da (1) v G *obstaja usmerjena pot iz izhodišča do vsakega vozlišča* in (2) G *nima negativnih ciklov.*

Bellmanove enačbe

Pišimo u_i namesto $u_{1,i}$. Kako izračunati u_i za dani i? Če je $i = 1$, je $u_1 = c_{1,1} = 0$. Če je $i \neq 1$, ima najcenejša pot iz 1 v i obliko $1 \rightsquigarrow k \to i$, kjer je $k \neq i$. Po načelu optimalnosti mora biti $1 \rightsquigarrow k$ najcenejša pot iz 1 v k, zato je njena cena u_k. Če temu prištejemo še ceno povezave $k \to i$, dobimo $u_k + c_{k,i}$, kar je cena najcenejše poti iz 1 v i, *ki prečka i-jevega soseda k*. Toda i ima lahko še druge sosede $k', k'', \ldots$ in preko vsakega lahko obstaja najcenejša pot iz 1 v i. Najcenejša med temi potmi mora biti iskana najcenejša pot iz 1 v i (ne glede na to, katerega soseda prečka). Ugotovili smo, da je

$$u_i = \min_{\substack{k \\ (k,i) \in A}} \{u_k + c_{k,i}\}.$$



Najcenejša pot iz 1 v i prečka nekega soseda vozlišča i.

To mora veljati za vsak $i = 2, 3, \ldots, n$; povedano drugače, za $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ mora veljati naslednji sistem t.i. *Bellmanovih* enačb (BE):

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= \min_{\substack{k \\ (k,2)\in A}} \{u_k + c_{k,2}\} \\
u_3 &= \min_{\substack{k \\ (k,3)\in A}} \{u_k + c_{k,3}\} \\
&\vdots \\
u_i &= \min_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k + c_{k,i}\} \\
&\vdots \\
u_n &= \min_{\substack{k \\ (k,n)\in A}} \{u_k + c_{k,n}\}
\end{aligned}
$$

oz. krajše

$$
\boxed{u_i = \begin{cases} 0 & \text{če } i = 1; \\ \min\limits_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k + c_{k,i}\} & \text{če } i \geqslant 2. \end{cases}} \quad \text{BE}
$$

Ugotovili smo: če so $u_1, u_2, \ldots, u_n$ cene najcenejših poti iz 1 v vozlišča $1, 2, \ldots, n$ grafa $G(V, A, c)$, potem so rešitev grafu pridruženega sistema BE. Povedano drugače: če so $u_1, u_2, \ldots, u_n$ rešitev *Problema najcenejših poti iz izhodišča* za dani graf $G(V, A, c)$, potem so tudi rešitev grafu pridruženega sistema BE.

Kaj pa obratno? Če so $u_1, u_2, \ldots, u_n$ rešitev grafu $G(V, A, c)$ pridruženega sistema BE, ali so tudi rešitev *Problema najcenejših poti iz izhodišča* za $G(V, A, c)$? Odgovor je *da*. Seveda moramo to dokazati.

Ideja dokaza. Ugotoviti moramo, kaj v grafu $G(V, A, c)$ pomenijo $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ki so rešitev BE. Do ugotovitve, da „u_i pomeni ceno najcenejše poti iz 1 v i v G" pridemo, ker nam na podlagi lastnosti $u_1, u_2, \ldots, u_n$ uspe (i) povezati vozlišča V grafa G v drevo T s korenom v 1 in povezavami $k \to i$, kjer je k tisti, ki minimizira desni del enačbe $u_i = \min_k\{u_k + c_{k,i}\}$; (ii) dokazati, da je T vpeto drevo v G; (iii) dokazati, da je u_i cena neke poti iz 1 v i v G; in (iv) dokazati, da je $u_1, u_2, \ldots, u_n$ edina rešitev BE. □

Posledica obeh ugotovitev je pomembna:

Sklep. *Rešitev Problema najcenejših poti iz izhodišča v grafu $G(V, A, c)$ je natanko rešitev grafu pripadajočega sistema Bellmanovih enačb.*

Problem *Najcenejših poti iz izhodišča* smo *prevedli* na problem *Reševanje sistema BE.* Praktično to pomeni, da lahko reševanje *Problema najcenejših poti iz izhodišča* nadomestimo z reševanjem sistema Bellmanovih enačb. Zato bomo našo pozornost preusmerili na vprašanje, kako rešiti sistem Bellmanovih enačb.

Reševanje sistema BE Bellmanovih enačb

Oglejmo si spet sistem Bellmanovih enačb

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= \min_{\substack{k \\ (k,2)\in A}} \{u_k + c_{k,2}\} \\
u_3 &= \min_{\substack{k \\ (k,3)\in A}} \{u_k + c_{k,3}\} \\
&\vdots \\
u_i &= \min_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k + c_{k,i}\} \\
&\vdots \\
u_n &= \min_{\substack{k \\ (k,n)\in A}} \{u_k + c_{k,n}\}
\end{aligned}
$$

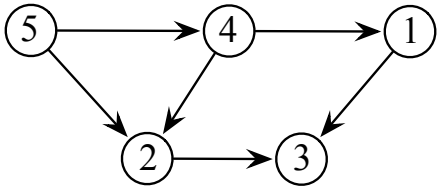
Kako naj ga rešimo? Enačba $u_i = \min_{k,(k,i)\in A}\{u_k + c_{k,i}\}$ razkriva, da za izračun u_i potrebujemo *nekatere že izračunane* u_k. Zato bi bila za reševanje sistema primerna metoda *dinamičnega programiranja.*

V nadaljevanju bomo obravnavali družine sistemov BE (oz. grafov $G(V, A, c)$), kjer je ta metoda posebno primerna.

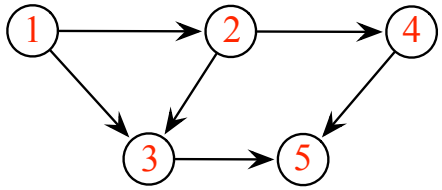
Prva taka družina sistemov BE pripada *acikličnim* grafom $G(V, A, c)$. Preden si jo bomo ogledali, moramo na kratko zaviti z glavne poti in spoznati, kaj je *topološko urejanje* grafov.

Topološko urejanje grafov

Naj bo $G(V, A)$ graf z množico vozlišč $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Vozlišča želimo preimenovati tako, da bo po preimenovanju vsaka povezava tekla iz vozlišča z manjšim imenom v vozlišče z večjim imenom. Preimenovanje vozlišč naj opravi bijektivna funkcija $\tau : V \to V$, ki vsakemu $i \in V$ priredi novo ime $\tau(i) \in V$, da bo veljalo $(i, j) \in A \Rightarrow \tau(i) < \tau(j)$. Če za graf $G(V, A)$ taka funkcija τ obstaja, rečemo, da τ *topološko ureja* $G(V, A)$ oz. da je $G(V, A)$ z njo topološko urejen.



i	$\tau(i)$
1	4
2	3
3	5
4	2
5	1



Graf je topološko urejen s $\tau(i)$.

Nekateri grafi imajo več različnih topoloških ureditev. Npr., graf na prejšnji sliki topološko ureja tudi funkcija $\tau = \binom{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5}{3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 1}$. Vendar pa obstajajo grafi, ki jih ni mogoče topološko urediti. Tak je, na primer, usmerjeni cikel $3 \to 1 \to 2 \to 3$. *Kateri grafi se dajo topološko urediti in kateri ne?* Odgovor dá tale izrek:

Izrek. *Graf G(V,A) se da topološko urediti natanko tedaj, ko je acikličen.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo G topološko urejen. Če bi imel cikel, bi v ciklu obstajalo vozlišče i z lastnostjo $i < i$, kar ni možno. Zato je G acikličen. ($\Leftarrow$) Naj bo G acikličen. Z indukcijo po $|V|$ dokažimo, da se da topološko urediti. Pri $|V| = 1$ je to očitno. Predpostavimo, da trditev velja za vse aciklične grafe z $|V| = n$. Naj bo G poljuben acikličen graf z $n + 1$ vozlišči. Ker je G acikličen, ima vozlišče i z vhodno stopnjo 0. Vozlišče i preimenujmo v 1 in odstranimo skupaj z vsemi njegovimi povezavami iz G. Preostanek $G - i$ je graf z n vozlišči, ki se ga po predpostavki da topološko urediti (z novimi imeni $2, 3, \ldots, n$). $\square$

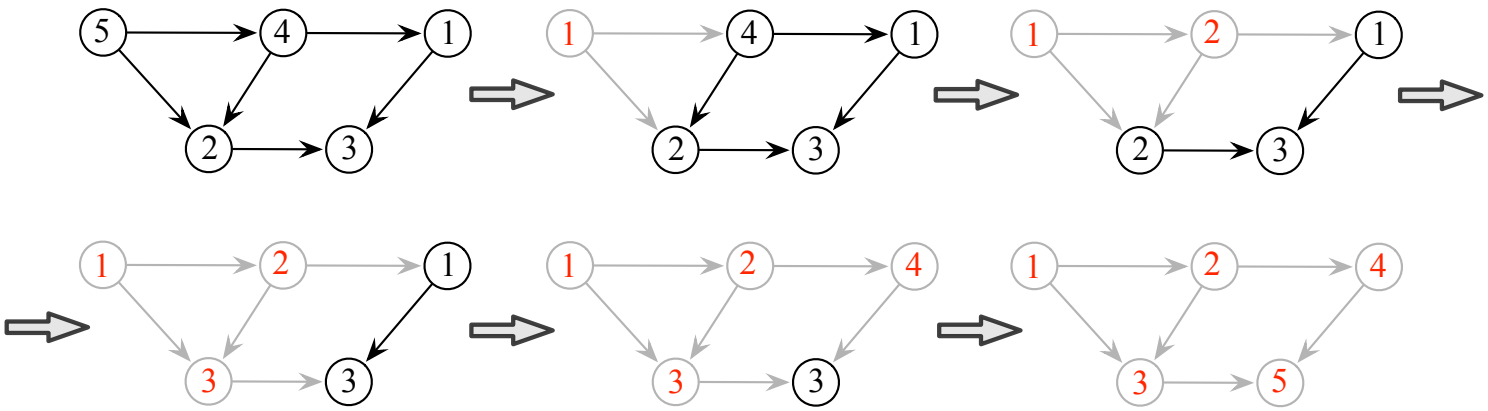
Drugi del dokaza je *konstruktiven*, kar pomeni, da opiše algoritem za topološko ureditev poljubnega acikličnega grafa. Zapišimo ta algoritem v psevdokodi:

```
procedure Topoloska_Ureditev(G);
begin
  G':= G;                                          //G ohrani, G' krci
  s := 0;
  while Ima_vozlisce_z_vh.stopnjo_0(G') do
    i := Izberi_vozlisce_z_vh.stopnjo_0(G');
    s++;
    tau(i) := s;                                   //doloci novo ime za i
    G':= G'-i                                //izloci i in njegove povezave
  endwhile;
  if Prazen_graf(G')
    then return(G_je_aciklicen; topolosko_urejen_s_tau)
    else return(G_je_ciklicen)
end.
```

Časovna zahtevnost.

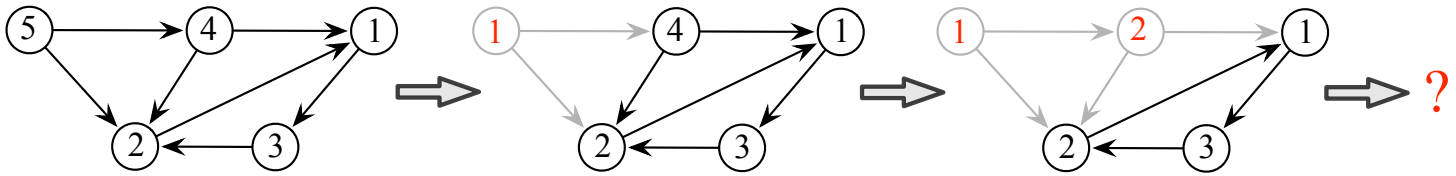
Časovno zahtevnost algoritma narekuje zanka `while`. Vsaka izvedba njenega telesa je hitrejša od prejšnje, ker se število vozlišč, ki jih je treba pregledati in med njimi eno izbrati, vsakokrat zmanjša za 1. Ker k-ta izvedba zahteva $\mathcal{O}(|V|-k)$ časa, vse zahtevajo $c(|V|+|V|-1+\ldots+2+1) = \mathcal{O}(|V|^2)$ časa. Časovna zahtevnost algoritma za topološko ureditev grafa $G(V, A)$ je torej $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Primer. Poglejmo, kako poteka topološko urejanje grafa s prejšnje slike.



Topološko urejanje grafa. Rdeča števila so nova imena vozlišč. Algoritem je v tretjem koraku med 1 in 2 izbral točko 2 in jo preimenoval v 3.

Primer. Poglejmo še, kako se konča poskus topološke ureditve *cikličnega* grafa.



Poskus, da bi topološko uredili *ciklični* graf G se konča, ko *neprazen* graf G' *nima* točke z vhodno stopnjo 0. To je znak, da je G cikličen graf.

Najcenejše poti iz izhodišča v acikličnem grafu

Če je graf *acikličen*, mu lahko pridružimo ustrezen sistem Belmannovih enačb, ki je primeren za reševanje z metodo dinamičnega programiranja. To dosežemo tako, da graf prej topološko uredimo. Poglejmo podrobnosti.

Naj bo dan *acikličen* graf. Ko ga topološko uredimo, dobimo graf $G(V, A, c)$, ki ga odlikuje lastnost $(i, j) \in A \Rightarrow i < j$. Torej, če je v $G(V, A, c)$ povezava $i \to j$, potem je $i < j$. To vpliva tudi na Bellmanove enačbe, kjer se pogoj $(k, i) \in A$ nadomesti s pogojem $k < i$, tako da se enačbe zdaj glasijo

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= \min_{\substack{k \\ k<2}} \{u_k + c_{k,2}\} \\
u_3 &= \min_{\substack{k \\ k<3}} \{u_k + c_{k,3}\} \\
&\vdots \\
u_i &= \min_{\substack{k \\ k<i}} \{u_k + c_{k,i}\} \\
&\vdots \\
u_n &= \min_{\substack{k \\ k<n}} \{u_k + c_{k,n}\}.
\end{aligned}
$$

Računanje rešitve $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tega sistema BE teče po naraščajočem indeksu i: ko so izračunani $u_1, \ldots, u_{i-1}$, lahko začnemo računati u_i:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 0 \\
u_2 &= u_1 + c_{1,2} \\
u_3 &= \min\{u_1 + c_{1,3},\ u_2 + c_{2,3}\} \\
u_4 &= \min\{u_1 + c_{1,4},\ u_2 + c_{2,4},\ u_3 + c_{3,4}\} \\
u_5 &= \min\{u_1 + c_{1,5},\ u_2 + c_{2,5},\ u_3 + c_{3,5},\ u_4 + c_{4,5}\} \\
&\vdots \\
u_i &= \min\{u_1 + c_{1,i},\ u_2 + c_{2,i},\ u_3 + c_{3,i},\ \ldots, u_{i-1} + c_{i-1,i}\} \\
&\vdots \\
u_n &= \min\{u_1 + c_{1,n},\ u_2 + c_{2,n},\ u_3 + c_{3,n},\ u_4 + c_{4,n},\ \ldots, u_{n-1} + c_{n-1,n}\}
\end{aligned}
$$

Algoritem za tak izračun $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je zdaj enostaven (vaja!).

Časovna zahtevnost. Izračun u_i zahteva $i-1$ seštevanj in $i-2$ primerjanj. Izračun rešitve sistema zato zahteva $\sum_{i=2}^{n}(i-1) = n(n-1)/2 = \mathcal{O}(n^2)$ seštevanj in $\sum_{i=3}^{n}(i-2) = (n-1)(n-2)/2 = \mathcal{O}(n^2)$ primerjanj.

Sklep. *Časovna zahtevnost računanja najcenejših poti iz izhodišča v acikličnem grafu $G(V, A, c)$ je $\mathcal{O}(|V|^2)$.*

Najcenejše poti iz izhodišča v grafu s pozitivnimi cenami (Dijkstra)

Naj bo $G(V, A, c)$ usmerjen graf, v katerem so cene vseh povezav *pozitivne*; torej $(i, j) \in A \Rightarrow c_{i,j} > 0$. Pri tej družini grafov se pri računanju cen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ne bomo naslonili na sistem BE pač pa opisali algoritem, ki ga je zasnoval Dijkstra. Dijkstra je razmišljal nekako takole:

1. V vsakem trenutku računanja cen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ je vsaka cena u_i bodisi *začasna* bodisi *dokončna*. Zato je v vsakem trenutku $V = Z \cup D$, kjer je Z množica vozlišč z začasnimi, D pa množica vozlišč z dokončnimi cenami. Na začetku računanja je že znana in dokončna cena $u_1 = 0$, cene $u_2, u_3, \ldots, u_n$ pa bo treba še izračunati, zato so – ne glede na njihovo inicializacijo – vse še začasne. Seveda jih je smiselno inicializirati na $u_i := c_{1,i}\,(= \infty,\ \text{če}\ (1, i) \notin A)$. Torej se algoritem začne takole:

$$u_1 := 0; \quad \forall i > 1 : u_i := c_{1,i}; \quad D := \{1\}; \quad Z := \{2, 3, \ldots, n\};$$

2. V nadaljevanju želimo, da bi se množica D monotono večala, tako da bi vozlišča prestopala iz Z v D. Kako pa začasna cena nekega vozlišča postane dokončna? Dijkstra je opazil tole: če je u_k *najmanjša začasna* cena, torej $u_k = \min_{j \in Z}\{u_j\}$, potem se u_k ne bo več zmanjšal.

   Zakaj? Denimo, da bi do k vodila kaka cenejša pot, ki bi šla čez vsaj eno vozlišče $\ell \in Z$ (Slika a). Njena cena bi bila $u_\ell + \mathrm{c}(\ell \rightsquigarrow k) < u_k$. Ker so cene povezav pozitivne, bi bila $\mathrm{c}(\ell \rightsquigarrow k) > 0$ in zato $u_\ell < u_k$. To bi bilo protislovno, saj je u_k po predpostavki najmanjša začasna cena.

   Ker je cena u_k dokončna, mora k prestopiti iz Z v D. Če zaradi prestopa postane $Z = \emptyset$, se algoritem konča, saj so vse cene $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dokončne. Algoritem torej dopolnimo z ukazi

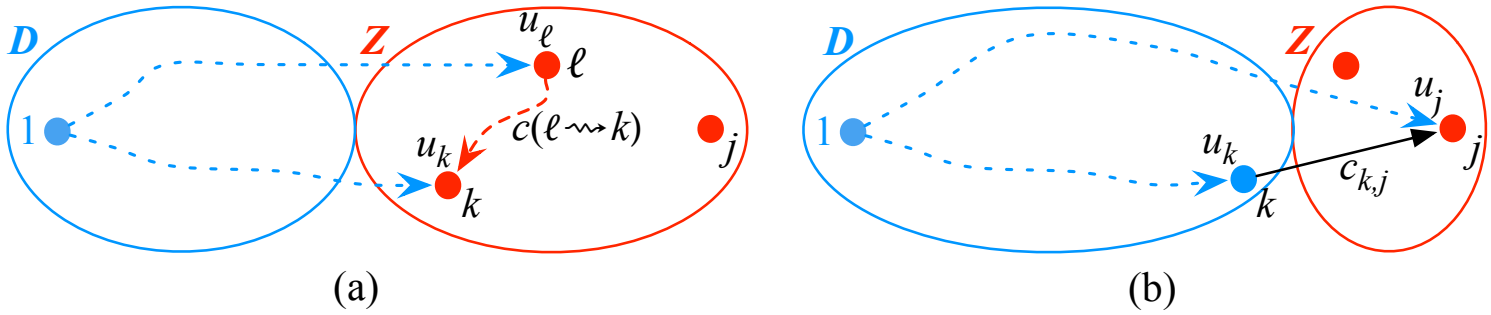
   $$u_k := \min_{j \in Z}\{u_j\}; \quad D := D \cup \{k\}; \quad Z := Z - \{k\}; \quad \text{Če je } Z = \emptyset, \text{ končaj.}$$

3. Ko cena u_k postane dokončna, to lahko vpliva na ostale začasne cene $u_j, j \in Z$.

Zakaj? Začasne cene u_j, kjer $j \neq k$, so bile izračunane na podlagi vozlišč v D, ko med njimi še ni bilo vozlišča k. Zdaj pa začasno najkrajša pot do $j \in Z$ lahko gre *tudi čez* k (Slika b).

Zato algoritem dopolnimo:

$$\forall j \in Z : u_j := \min\{u_j, u_k + c_{k,j}\}; \qquad \text{Skoči na korak 2.}$$



Po zgornjih korakih zapišimo Dijkstrov algoritem še v psevdokodi:

```
procedure Dijkstrov_Algoritem(G(V,A,c));
begin
  u_1 := 1;  for i := 2 to n do u_i := c_1,i;              // 1
  D := {1}; Z := {2,3,...,n};
  while NiPrazna(Z) do
    u_k := min_{j \in Z}{u_j};                             // 2
    D := D + {k}; Z := Z - {k};
    if NiPrazna(Z) then
      forall j \in Z do u_j := min{u_j, u_k + c_k,j};      // 3
  endwhile
 end.
```

Časovna zahtevnost. Časovno zahtevnost algoritma narekuje zanka `while`. Njeno telo se izvede n–1-krat, saj v vsaki izvedbi Z zapusti eno vozlišče. Iskanje u_k zahteva največ $|Z|-1$ primerjanj, popravljanje preostalih začasnih cen pa $|Z|-1$ primerjanj in $|Z|-1$ seštevanj. Ostale operacije v telesu zanke zahtevajo $\mathcal{O}(1)$ časa. Izvedba telesa zanke torej zahteva $3(|Z|-1)+\mathcal{O}(1)$ operacij. Ker je v i-ti izvedbi $|Z| = n-i$, zahteva i-ta izvedba telesa $3(n-i-1)+\mathcal{O}(1)$ operacij. Torej je zahtevnost zanke $3\big((n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots 2+1\big)+(n-1)\mathcal{O}(1)$, kar je reda $\mathcal{O}(n^2)$.

Sklep. *Časovna zahtevnost računanja najcenejših poti iz izhodišča v grafu $G(V,A,c)$ s pozitivnimi cenami je $\mathcal{O}(|V|^2)$.*

Najcenejše poti iz izhodišča v splošnem grafu (Bellman-Ford)

Spoznali smo, kako računamo najcenejše poti iz izhodišča v acikličnem grafu in v grafu s pozitivnimi cenami povezav. Kaj pa, če je graf cikličen in ima tudi povezave z negativnimi cenami? (Nima pa negativnih ciklov.) V tem primeru topološka ureditev grafa in Dijkstrov algoritem nista več uporabna. Na srečo pa sta algoritem za te splošne grafe odkrila Bellman in Ford.

Naj bo $G(V, A, c)$ utežen usmerjen graf, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč, $A \subseteq V \times V$ množica usmerjenih povezav med vozlišči in $c : V \times V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcija, ki vsakemu paru $(i, j) \in V \times V$ priredi njegovo ceno $c_{i,j}$. Zahtevamo tudi, da za vse $1 \leqslant i, j \leqslant n$ velja $c_{i,i} = 0$ in $(i, j) \notin A \Rightarrow c_{i,j} = \infty$.

Ključni uvid Bellmana in Forda v razvoju algoritma, je:

- Najcenejša pot iz 1 v i ima kvečjemu $n-1$ povezav (sicer bi se neko vozlišče ponovilo, dobljeni cikel bi bil pozitiven, pot čezenj pa ne najcenejša).
- Naj bo $u_i^{(p)} \equiv$ cena najcenejše poti iz 1 v i, ki ima kvečjemu p povezav.
- Trivialna ekvivalenca: Za poljubna $x, p \in \mathbb{N}$ je $x \leqslant p \iff (x \leqslant p-1) \vee (x = p)$.
- Ta ekvivalenca je podlaga za naslednjo ugotovitev:
  Najcenejša pot P iz 1 v i, ki ima kvečjemu p povezav, ima
  (a) *bodisi* kvečjemu $p-1$ povezav;
  (b) *bodisi* natanko p povezav.
- Cena $u_i^{(p)}$ poti P je odvisna od alternative (a) ali (b), ki velja za P; zato je
  (a′) *bodisi* $u_i^{(p)} = u_i^{(p-1)}$;
  (b′) *bodisi* $u_i^{(p)} = \min\limits_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k^{(p-1)} + c_{k,i}\}$.
- Ker poti P še ne poznamo, ne vemo, katera alternativa velja, vemo pa, da mora biti cena $u_i^{(p)}$ poti P manjša izmed alternativnih cen (a′) in (b′); torej $u_i^{(p)} = \min\{u_i^{(p-1)}, \min\limits_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k^{(p-1)} + c_{k,i}\}\}$. To je *rekurzivna enačba* za $u_i^{(p)}$!
- *Začetne vrednosti* za rekuzivno enačbo so jasne: $u_1^{(1)} = 0$ in $u_i^{(1)} = c_{1,i}$ za $i > 1$.

Tako sta Bellman in Ford za splošni graf izpeljala tale sistem BE:

$$u_i^{(p)} = \begin{cases} 0 & \text{če } i = 1, \text{ vsi } p; \\ c_{1,i} & \text{če } i > 1, p = 1; \\ \min\{u_i^{(p-1)}, \min\limits_{\substack{k \\ (k,i)\in A}} \{u_k^{(p-1)} + c_{k,i}\}\} & \text{če } i > 1, p > 1. \end{cases}$$

Kako uporabimo ta sistem pri računanju cen u_i najcenejših poti iz izhodišča? Najprej vidimo, da je

$$u_i = u_i^{(n-1)}.$$

Torej bomo uporabili zgornji sistem in izračunali $u_i^{(n-1)}$ za vse $i = 1, 2, \ldots, n$. Kako? Množici vseh cen $u_i^{(p)}, i = 1, 2, \ldots, n$ pri izbranem p recimo *p-generacija* cen. Iz sistema enačb vidimo, da za izračun p-generacije rabimo (p–1)-generacijo, saj je enačba za $u_i^{(p)}$ rekurzivna enačba *prve* stopnje. Zato bomo računali p-generacije po vrsti, tj. po naraščajočem $p = 1, 2, \ldots, n-1$.

Psevdokoda algoritma je torej

```
procedure Bellman_Fordov_Algoritem(G(V,A,c));
begin
  for p := 1 to n-1 do u_1^(p) := 0 endfor;
  for i := 2 to n do u_i^(1) := c_{1,i} endfor;
  for p := 2 to n-1 do
    for i := 2 to n do
      u_i^(p) := min{u_i^(p-1),min_{k,k->i \in A}{u_k^(p-1)+c_{k,i}}
    endfor
  endfor
end.
```

Časovna in prostorska zahtevnost. Časovno zahtevnost določa dvojna zanka `for p...for i`. Njeno telo (računanje $u_i^{(p)}$) se izvede $n(n-2)$-krat, izvedba telesa pa zahteva največ $n-1$ seštevanj in največ n primerjanj (operacij min). *Časovna* zahtevnost dvojne zanke in s tem Bellman-Fordovega algoritma je $\mathcal{O}(n^3)$. Kaj pa prostorska zahtevnost? Prostor, ki je potreben za p-generacijo cen, obsega n pomnilniških besed. Pri izračunu p-generacije pa je potrebna še prejšnja generacija. Ostale spremenljivke zahtevajo $\mathcal{O}(1)$ pomnilniških besed. Prostorska zahtevnost Bellman-Fordovega algoritma je zato $\mathcal{O}(n)$.

Sklep. *Časovna zahtevnost računanja najcenejših poti iz izhodišča v splošnem grafu $G(V, A, c)$ je $\mathcal{O}(|V|^3)$, prostorska zahtevnost pa $\mathcal{O}(|V|)$.*

17. Najcenejše poti med vsemi pari

Definicija problema

Dan je utežen usmerjen graf $G(V, A, c)$, kjer je $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ množica vozlišč, $A \subseteq V \times V$ množica usmerjenih povezav in $c : V \times V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcija, ki vsakemu paru $(i, j) \in V \times V$ priredi njegovo *ceno* $c_{i,j}$. Za vsak $i \in V$ je $c_{i,i} = 0$, in če $(i, j) \notin A$, je $c_{i,j} = \infty$. Cena u_{i_z,i_k} usmerjene poti $i_z = i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_\ell = i_k$ iz vozlišča i_z v vozlišče i_k je vsota cen na njenih povezavah,

$$u_{i_z,i_k} = \sum_{j=1}^{j=\ell-1} c_{i_j,i_{j+1}}.$$

Cikel v grafu $G(V, A, c)$ je *negativen*, če je njegova cena negativno število. Spet predpostavljamo, da $G(V, A, c)$ nima negativnih ciklov.

Problem: *Za vsak par vozlišč $i, j \in V$ poišči ceno $u_{i,j}$ najcenejše poti iz i v j.*

Motivacija

Algoritem B, ki reši ta problem, se sam ponuja. Če kakega od algoritmov A za iskanje cen najcenejših poti iz *izhodišča* $= 1$ (glej prejšnje poglavje) popravimo tako, da postane *izhodišče* njegov vhodni parameter, je B na dlani:

```
procedure B(G);
begin
  for izhodisce := 1 to n do A(G,izhodisce) endfor
end.
```

Če je A algoritem za aciklične G, je časovna zahtevnost algoritma B $\mathcal{O}(|V|^3)$; če je A Dijkstrov algoritem, je časovna zahtevnost B enaka $\mathcal{O}(|V|^3)$; in če je A Bellman-Fordov algoritem, ima B časovno zahtevnost $O(|V|^4)$.

Vendar pa se nam zdi časovna zahtevnost $\mathcal{O}(|V|^4)$ algoritma B pri splošnih grafih velika. Bi lahko problem rešiti hitreje? Odgovor je *da*. Prva izboljšava, t.i. *posplošeni* Bellman-Fordov algoritem, izkorišča neko podobnost z matričnim množenjem in zmanjša časovno zahtevnost na $\mathcal{O}(|V|^3 \log |V|)$. Te izboljšave ne bomo opisali podrobneje, ker sta Floyd in Warshall, odkrila boljši algoritem.

Najcenejše poti med vsemi pari (Floyd-Warshall)

Zamisel, ki sta jo dobila Floyd in Warshall v razvoju algoritma, je:

- Naj bo $u_{i,j}^{(m)} \equiv$ cena najcenejše poti iz i v j, na kateri imajo vsa vmesna vozlišča oznake kvečjemu m. (Pri $m = 0$ je $u_{i,j}^{(0)} = c_{i,j}$.)
- Velja $u_{i,j} = u_{i,j}^{(n)}$.
- Najcenejša pot P iz i v j, na kateri imajo vsa vmesna vozlišča oznake $\leqslant m$,
  (a) *bodisi* ne gre čez vozlišče m
  (b) *bodisi* gre čez vozlišče m (torej je $P = i \rightsquigarrow m \rightsquigarrow j$).

  V primeru (a) so na P le vozlišča $\leqslant m-1$; v (b) gre P čez m natanko 1x.
- Cena $u_{i,j}^{(m)}$ poti P je odvisna od alternative (a) ali (b), ki velja za P; zato je
  (a′) *bodisi* $u_{i,j}^{(m)} = u_{i,j}^{(m-1)}$
  (b′) *bodisi* $u_{i,j}^{(m)} = u_{i,m}^{(m-1)} + u_{m,j}^{(m-1)}$ (zaradi načela optimalnosti).

  Ker poti P ne poznamo, ne vemo, katera alternativa velja. Vemo pa, da mora biti cena $u_{i,j}^{(m)}$ poti P manjša izmed alternativnih cen (a′) in (b′); torej $u_{i,j}^{(m)} = \min\{u_{i,j}^{(m-1)}, u_{i,m}^{(m-1)} + u_{m,j}^{(m-1)}\}$. To je *rekurzivna enačba* za $u_{i,j}^{(m)}$!
- *Začetne vrednosti* za to enačbo so $u_{i,j}^{(0)} = c_{i,j}$.

Tako sta Floyd in Warshall za splošni graf izpeljala naslednji sistem enačb:

$$u_{i,j}^{(m)} = \begin{cases} c_{i,j} & \text{če } m = 0; \\ \min\{u_{i,j}^{(m-1)}, u_{i,m}^{(m-1)} + u_{m,j}^{(m-1)}\} & \text{če } 1 \leqslant m \leqslant n. \end{cases}$$

Enačb je $n^3 + n^2$ (n^3 za $m, i, j = 1, \ldots, n$ ter n^2 za $m = 0$ in $i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Ker iščemo vrednosti $u_{i,j}$ in je $u_{i,j} = u_{i,j}^{(n)}$, bomo iz zgornjega sistema izračunali vrednosti $u_{i,j}^{(n)}$. Kako? Iz rekurzivne enačbe za $u_{i,j}^{(m)}$ vidimo, da m-generacijo cen izračunamo iz $(m-1)$-generacije. Torej bomo računali m-generacije po naraščajočih vrednostih $m = 1, 2, \ldots, n$.

Psevdokoda algoritma je zato

```
procedure Floyd_Warshallov_Algoritem(G(V,A,c));
begin
  for i := 1 to n do              //m = 0
    for j := 1 to n do
      u_{i,j}^(0) := c_{i,j}
    endfor
  endfor;
  for m := 1 to n do              //m > 0
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
        u_{i,j}^(m) := min{u_{i,j}^(m-1),u_{i,m}^(m-1)+u_{m,j}^(m-1)}
      endfor
    endfor
  endfor
end.
```

Časovna zahtevnost. Časovno zahtevnost narekuje trojna zanka. Telo zanke (računanje $u_{i,j}^{(m)}$) se izvede n^3-krat, izvedba telesa pa zahteva eno seštevanje in eno primerjanje. Časovna zahtevnost Floyd-Warshallovega algoritma je zato $\mathcal{O}(n^3)$. To je izboljšanje naivnega algoritma B, ki bi n-krat zagnal Bellman-Fordov algoritem.

Prostorska zahtevnost. Vsaka generacija vsebuje n^2 števil (za vse pare i, j), zato zahteva n^2 pomnilniških besed. Ker vsako generacijo izračunamo iz prejšnje generacije, potrebujemo za obe generaciji $2n^2 = \mathcal{O}(n^2)$ pomnilniški besed. Ostale spremenljivke v algoritmu zahtevajo $\mathcal{O}(1)$ prostora. Zato je prostorska zahtevnost Floyd-Warshallovega algoritma reda $\mathcal{O}(n^2)$.

Sklep. *Časovna zahtevnost računanja najcenejših poti med vsemi pari vozlišč v splošnem grafu $G(V, A, c)$ je $\mathcal{O}(|V|^3)$, prostorska zahtevnost pa $\mathcal{O}(|V|^2)$.*

Izboljšava: računanje *na mestu*

Zanimivo je, da lahko Floyd-Warshallov algoritem implementiramo tako, da mu zadošča prostor le za *eno* generacijo, torej za vsa števila $u_{i,j}^{(m)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, čeprav njihov izračun zahteva tudi prejšnjo generacijo $u_{i,j}^{(m-1)}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Implementacija računa m-generacijo na prostoru $(m-1)$-generacije tako, da z nobenim novim številom $u_{i,j}^{(m)}$ ne spremeni („povozi") kakega števila $u_{i,j}^{(m-1)}$, ki se bo še potrebovalo. Pravimo, da algoritem izračuna rezultat *na mestu* (lat. *in situ*). Kako to dosežemo?

Mislimo si, da so vsa števila $(m-1)$-generacije razporejena v matriki U takole:

$$
U = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \\ m \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & & m & & & j & & & & n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
u_{1,1}^{(m-1)} & u_{1,2}^{(m-1)} & \cdots & & & & \vdots & & \cdots & & u_{1,n}^{(m-1)} \\
u_{2,1}^{(m-1)} & u_{2,2}^{(m-1)} & \cdots & & & & \vdots & & \cdots & & u_{2,n}^{(m-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
 & & & u_{m,m}^{(m-1)} & & & u_{m,j}^{(m-1)} & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & & & \ddots & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & u_{i,m}^{(m-1)} & \cdots & \cdots & u_{i,j}^{(m-1)} & \ddots & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
u_{n,1}^{(m-1)} & u_{n,2}^{(m-1)} & \cdots & & & & & & \cdots & & u_{n,n}^{(m-1)}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Izračunajmo m-generacijo kot narekuje Floyd-Warshallov sistem enačb, vendar novi $u_{i,j}^{(m)}$ *hrabro vpišimo nazaj na isto mesto:* $U_{i,j} = \min\{U_{i,j}, U_{i,m} + U_{m,j}\}$.

Vprašanje: *Ali smo z vpisom izgubili staro vsebino $U_{i,j}$, ki se bo še potrebovala?* Poglejmo, kaj se dogaja, ko računamo novo vrednost $U_{i,j}$. Izračun nove vsebine komponente $U_{i,j} = u_{i,j}^{(m)}$ rabi tri stare vsebine komponent,

$$U_{i,j} = u_{i,j}^{(m-1)} \qquad U_{i,m} = u_{i,m}^{(m-1)} \qquad U_{m,j} = u_{m,j}^{(m-1)},$$

spremeni pa le prvo od njih, $U_{i,j}$ (pa še to le, če je $u_{i,m}^{(m-1)} + u_{m,j}^{(m-1)} < u_{i,j}^{(m-1)}$). Torej je novi $U_{i,j}$ odvisen samo od starega $U_{i,j}$ in od vsebin dveh komponent, ki sta v m-ti vrstici in m-tem stolpcu matrike U (ki po spremembi $U_{i,j}$ ostaneta nespremenjeni).

Pokažimo, da stare vsebine $U_{i,j}$ ne bomo potrebovali (zato jo res smemo zamenjati z novo). Naj bo $U_{k,\ell}\,(\neq U_{i,j})$ poljubna druga komponenta izven m-te vrstice in m-tega stolpca. Računanje novega $U_{k,\ell}$ bo potrebovalo stari $U_{k,\ell}$ in vsebini dveh komponent v m-ti vrstici in m-tem stolpcu. Ker $U_{i,j}$ ni v nobeni od njiju, računanje novega $U_{k,\ell}$ ne potrebuje starega $U_{i,j}$. Kaj pa, če je $U_{k,\ell}\,(\neq U_{i,j})$ v m-ti vrstici ali m-tem stolpcu? Denimo, da je v m-ti vrstici. Tedaj je $k = m$, komponenta pa je $U_{m,\ell}$. Njena nova vrednost bo $U_{m,\ell} = \min\{U_{m,\ell}, U_{m,m} + U_{m,\ell}\}$. Toda $U_{m,m} = 0$, zato je $U_{m,\ell} = \min\{U_{m,\ell}, U_{m,\ell}\} = U_{m,\ell}$. Torej se $U_{m,\ell}$ ne spremeni, pri njenem izračunu pa starega $U_{i,j}$ očitno nismo rabili. Analogno dokažemo, če je $U_{k,\ell}$ v m-tem stolpcu.

Sklep. *Računanje naslednje generacije je izvedljivo na prostoru prejšnje generacije.*

Zdaj lahko zapišemo Floyd-Warshallov algoritem še z matriko U:

```
procedure Floyd_Warshallov_Algoritem(G(V,A,c));
begin
  for i := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      U[i,j] := C[i,j]
    endfor
  endfor;
  for m := 1 to n do
    for i := 1 to n do
      for j := 1 to n do
        U[i,j] := min{U[i,j],U[i,m]+U[m,j]]}
      endfor
    endfor
  endfor
end.
```

Sklep. *Časovna zahtevnost računanja najcenejših poti med vsemi pari vozlišč v splošnem grafu $G(V, A, c)$ je $\mathcal{O}(|V|^3)$, prostorska zahtevnost pa $\mathcal{O}(|V|)$.*

VI.
Požrešnost

18. Nalaganje zabojnikov

Definicija problema

V pristanišču čaka n zabojnikov na prevoz v Afriko. Zabojniki so enakih dimenzij, razlikujejo pa se po svojih težah, saj vsebujejo različen tovor. Zabojnike bo odpeljala ladja, a ne nujno vseh, ker teža naloženih zabojnikov ne sme preseči nosilnosti ladje. Po drugi strani pa kapetan želi odpeljati čim več zabojnikov, saj bo za prevoz vsakega prejel enako plačilo. Kapetan se sprašuje:

„Katere zabojnike naj naložim, da bo cena prevoza največja?"

Problem. *Zabojnike označimo s števili* $1, 2, \ldots, n$*, težo zabojnika* i *s* t_i*, nosilnost ladje s* T*, plačilo za prevoz enega zabojnika pa* p*. Za vsak* $i = 1, 2, \ldots, n$ *uvedimo spremenljivko* $x_i \in \{0, 1\}$*, ki bo povedala, kaj naj kapetan stori z zabojnikom* i*:*

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{če naj naloži } i \text{ na ladjo;} \\ 0 & \text{če naj ne naloži } i \text{ na ladjo.} \end{cases}$$

Kapetanova naloga je določiti take vrednosti spremenljivkam $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, da bo*

$$\sum_{i=1}^{n} p\, x_i \quad \textit{maksimalna} \qquad \textit{(kapetanov zaslužek)}$$

in

$$\sum_{i=1}^{n} x_i t_i \leqslant T. \qquad \textit{(nosilnost ladje)}$$

Vsaka prireditev vrednosti 0 ali 1 spremenljivkam $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ki zadošča pogoju $\sum_{i=1}^{n} x_i t_i \leqslant T$, je *dopustna* (možna) rešitev kapetanovega problema; vsaka dopustna rešitev, ki maksimizira vsoto $\sum_{i=1}^{n} p\, x_i$, pa je *optimalna*.

Opazimo naslednjo podrobnost: Kapetan želi maksimizirati zaslužek $\sum_{i=1}^{n} p\, x_i$, a ker je p konstanta, bo zaoščalo, da maksimizira vsoto $\sum_{i=1}^{n} x_i$. Slednja pa pomeni *število naloženih zabojnikov*. To nam da naslednjo zamisel algoritma.

Zamisel algoritma

Nalaganje zabojnikov naj teče v zaporednih korakih. Pred prvim korakom preimenujmo nosilnost T ladje v P, *preostanek nosilnosti* ladje. Spremenljivka P bo pred vsakim korakom povedala, kolikšno težo zabojnikov *lahko še naložimo* na ladjo. Nato v vsakem koraku izberimo enega izmed nenaloženih zabojnikov in če njegova teža t_i ne presega preostanka P nosilnosti ladje, zabojnik i naložimo na ladjo (torej postavimo $x_i := 1$) in zmanjšamo P za t_i. Ta postopek zagotavlja, da skupna teža naloženih zabojnikov ne bo presegla nosilnosti T ladje. Kakšno pa bo število naloženih zabojnikov? Kdaj bo to število maksimalno? Intuicija nam pravi, da bo to takrat, ko bomo v vsakem koraku izbrali *najlažjega* med nenaloženimi zabojniki, saj bomo z njim najmanj zmanjšali P, s tem pa omogočili, da se kasneje naloži več zabojnikov.

Zamisel zapišemo bolj jedrnato s spodnjim algoritmom.

```
procedure PozresnoNalaganjeZabojnikov(n,t,T) return table x;
begin
  for i:=1 to n do x_i := 0;     |Inicializiraj izhodno tabelo
  Uredi(t);                      |Uredi zabojnike po narascajoci tezi
  P := T;                        |Inicializiraj preostanek nosilnosti
  i := 1;
  while t_i <= P do              |Nalagaj, dokler se da
    x_i := 1;
    P := P-t_i
  endwhile;
  return x
end.
```

Kakovost rešitve

Trditev. Rešitev x, ki jo izračuna zgornji algoritem, je *optimalna*.

Dokaz. Naj bo $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ poljubna druga dopustna rešitev. Dokažimo, da y ni boljša rešitev od x, torej da mora veljati $\sum_{j=1}^{n} p\, y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} p\, x_i$ oz. $\sum_{j=1}^{n} y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$. Iz algoritma sledi, da je $x = \underbrace{11\ldots1}_{k}0\ldots0$, kjer je $1 \leqslant k \leqslant n$. *Recimo*, da bi bil y boljša rešitev od x, tj. $\sum_{i=1}^{n} x_i < \sum_{j=1}^{n} y_j$. Sledilo bi $k < \sum_{j=1}^{n} y_j$, zapis $y = y_1 y_2 \ldots y_n$ pa bi imel več kot k komponent 1. To bile komponente $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_{k+\ell}}$, kjer $1 \leqslant \ell \leqslant n-k$. Opazimo, da bi za $i = 1, 2, \ldots, k$ veljalo $i \leqslant j_i$ in prav tako tudi $t_i \leqslant t_{j_i}$. Sledilo bi $\sum_{i=1}^{k} t_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} t_{j_i}$. To pomeni, da bi bilo prvih k zabojnikov, naloženih na način y, vsaj tako težkih kot ves tovor, naložen na način x. Po predpostavki pa bi moral način y natovoriti še zabojnike $j_{k+1}, \ldots j_{k+\ell}$. Poglejmo, ali bi mu to uspelo s prvim zabojnikom j_{k+1}. Njegova teža je $t_{j_{k+1}}$, toda spet je $t_{k+1} \leqslant t_{j_{k+1}}$ (saj so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ urejene in $k+1 \leqslant j_{k+1}$).

Ker nalaganje x ni moglo povečati natovorjene teže $\sum_{i=1}^{k} t_i$ s težo t_{k+1}, tudi nalaganje y ne bo moglo povečati (kvečjemu večje) natovorjene teže $\sum_{i=1}^{k} t_{j_i}$ s (kvečjemu večjo) težo $t_{j_{k+1}}$. To pa je v protislovju s predpostavko. Zato y ne more biti boljša rešitev od x. □

18. Požrešna metoda

Požrešna metoda poskuša konstruirati rešitev z zaporedjem korakov. V vsakem koraku izbere tisto odločitev, ki se zdi med vsemi možnimi odločitvami tistega koraka najboljša glede na nek kriterij. Ta kriterij je seveda odvisen od reševanega problema, *požrešen* pa je zato, ker narekuje algoritmu, da ,,pograbi" najboljšo izmed trenutnih (lokalnih) možnosti, ne da bi se spreševal o (globalnih) posledicah te odločitve. Vsaka odločitev je tudi *dokončna*: ko je v nekem koraku sprejeta, je noben kasnejši korak ne more spremeniti.

Algoritmi, razviti s požrešno metodo, so sorazmerno enostavni in pogosto hitri. To ne preseneča, saj se ukvarjajo predvsem z iskanjem naslednje, lokalno optimalne odločitve. Samo s takim požrešnim, *lokalno* optimalnim vedenjem gradijo dopustno rešitev in si obetajo, da bo ta tudi *globalno* optimalna.

Pri nekaterih računskih problemih se požrešna metoda obnese in res vodi do optimalnih rešitev. Pri drugih problemih pa ne zagotavlja globalno optimalne rešitve; včasih se je namreč bolje odpovedati lokalno optimalnemu nadaljevanju, se odločiti za lokalno slabšo potezo in upati, da bo sledilo izdatno poplačilo za to vzdržnost v kakem kasnejšem koraku. Tako kot v življenju.

Če nam intuicija pravi, da naš požrešni algoritem vrača **optimalne** rešitve, je običajno, da poskušamo njihovo optimalnost tudi **dokazati**. Takrat pa ne smemo pozabiti, da nas intuicija lahko vara, in da zato morda takega dokaza ni. (Na primer, če vemo, da je reševani problem NP-težek ali celo težji, naš požrešni algoritem pa polinomsko časovno omejen, potem je zelo verjetno, da nam dokaza za optimalnost rešitev ne bo uspelo sestaviti, ker te zelo verjetno niso optimalne.)

Če pa smo zadovoljni tudi s **približnimi** (suboptimalnimi) rešitvami, je lahko požrešna metoda dobra podlaga za razvoj **hevrističnih algoritmov**, tj. algoritmov, pri katerih se v korist njihove hitrosti odpovemo zahtevi po optimalnosti rešitev. Pri nekaterih problemih je s požrešno metodo možno zasnovati celo take hevristične algoritme – imenovane **aproksimacijski algoritmi** – ki poleg polinomske hitrosti zagotavljajo tudi navzgor omejeno napako, tj. omejeno odstopanje dobljenih rešitvev od optimalnih rešitev.