Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
Σ	

Linearna algebra: 1. kolokvij

30. marec 2022

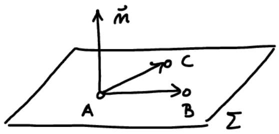
Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

V $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(1,0,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(3,1,0)$ in $D(-1,-1,0)$ ter premica p z enačbo

$$p : x-1 = \frac{z}{2},\ y = 1.$$

a) (5) Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje točke A, B in C.



$$\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_A = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\Sigma :\ y + z = 1$$

b) (2) Ali ležijo točke A, B, C in D na isti ravnini?

$\vec{r}_D \cdot \vec{n} = -1 \neq 1 \Rightarrow D \notin \Sigma \Rightarrow$ A, B, C in D niso koplanarne

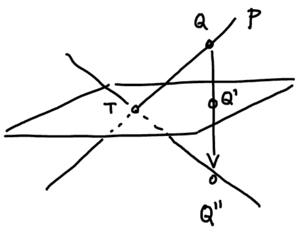
c) (7) Ali premica p seka ravnino Σ?

$\Sigma \cap p = \{T\}$, $T = ?$

$$\vec{r}_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t \\ 1 \\ 2t \end{bmatrix} \in \Sigma \Rightarrow 1 + 2t = 1 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow T(1,1,0)$$

Premica p in ravnina Σ se sekata (v točki $T(1,1,0)$).

d) (11) Poišči enačbo premice p', ki jo dobimo pri zrcaljenju premice p preko ravnine Σ.



$Q \in p$, $Q \notin \Sigma$, npr. za $t = 1$ dobimo $Q(2,1,2)$.

$$\vec{r}_{Q'} = \vec{r}_Q + k\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1+k \\ 2+k \end{bmatrix} \in \Sigma \Rightarrow 1+k+2+k = 1$$

$$3 + 2k = 1$$

$$k = -1$$

$$\vec{r}_{Q''} = \vec{r}_Q + 2k\vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}\,' \parallel \vec{TQ''} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T \Rightarrow p' : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

2. naloga (25 točk)

Za katere vrednosti parametra a ima sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ -3x + y - 3z &= 6 \\ -2x + y + (a^2 - a - 2)z &= a + 4 \end{aligned}$$

a) (12) enolično rešitev? V tem primeru rešitev eksplicitno zapiši.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & a^2-a-2 & a+4 \end{array}\right] \underset{\substack{II+3I \\ III+2I}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 21 \\ 0 & 5 & a^2-a & a+14 \end{array}\right] \underset{II:7}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & a^2-a & a+14 \end{array}\right] \underset{III-5II}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{array}\right] \underset{I-2II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{array}\right] \underset{a\neq 1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right] \underset{a\neq 0}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \end{array}\right] \underset{I-III}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \end{array}\right]$$

Če je $a \neq 0, 1$, potem je sistem enolično rešljiv, rešitev je

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -1-\frac{1}{a} & 3 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}^T.$$

b) (5) nobene rešitve?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{array}\right] \underset{a=0}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Če je $a = 0$, je tretja enačba protislovna ($0 = 1$) in sistem ni rešljiv.

c) (8) več rešitev? V tem primeru rešitve eksplicitno zapiši.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a(a-1) & a-1 \end{array}\right] \underset{a=1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to x + z = -1 \\ \to y = 3 \\ \end{array}$$

Za $a = 1$ so rešitve $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1-z \\ 3 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

3. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (15) Poišči inverzno matriko matrike $A + 2I$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{2\mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ 3\mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{\mathrm{III}(-1) \\ (\mathrm{II}+\mathrm{III}):3 \\ \mathrm{I}:2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}}_{(A+2I)^{-1}}$$

b) (10) Reši matrično enačbo $AX + 2X = B$.

$$(A+2I)X = B$$

$$X = (A+2I)^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 12 & 23 & 5 \end{bmatrix}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

V $\mathbb{R}^4$ opazujemo podmnožici

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \|A\mathbf{x}\| = \|2\mathbf{x}\|\} \qquad \text{in} \qquad W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}\}.$$

a) (13) Ena od podmnožic V in W je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$. Katera je in katera ni? Zakaj je oziroma zakaj ni?

W je vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$:

- $\vec{x}, \vec{y} \in W \Rightarrow \underline{A(\vec{x}+\vec{y})} = A\vec{x} + A\vec{y} = 2\vec{x} + 2\vec{y} = \underline{2(\vec{x}+\vec{y})} \rightarrow \vec{x}+\vec{y} \in W$
- $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{x} \in W \Rightarrow \underline{A(\alpha x)} = \alpha(A\vec{x}) = \alpha(2\vec{x}) = \underline{2(\alpha\vec{x})} \rightarrow \alpha\vec{x} \in W$

$\Big\} \checkmark$

V ni vekt. podprostor v $\mathbb{R}^4$:

- $\vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow \|A\vec{x}\| = \|2\vec{x}\|$ in $\|A\vec{y}\| = \|2\vec{y}\|$

$\leq$ zaradi trikotniške neenakosti

Ali je potem $\|A(\vec{x}+\vec{y})\| = \|2(\vec{x}+\vec{y})\|$? Ne nujno, ker $\|A(\vec{x}+\vec{y})\| \neq \|A\vec{x}\| + \|A\vec{y}\|$ za vse $\vec{x}$ in $\vec{y}$.

$\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \Rightarrow A\vec{x} = [x_1+x_2,\ 2x_3,\ x_1+x_3,\ 2x_4]^T$

$\|A\vec{x}\| = \|2\vec{x}\| \Leftrightarrow \|A\vec{x}\|^2 = \|2\vec{x}\|^2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2 + \cancel{4x_3^2} + (x_1+x_3)^2 + \cancel{4x_4^2} = 4x_1^2 + 4x_2^2 + \cancel{4x_3^2} + \cancel{4x_4^2}$

$\underline{-2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = 0}$ (*) ni lin. zveza, poiščemo protiprimer

Npr.: za $\vec{x} = [0, 1, \sqrt{3}, 0]^T$, $\vec{y} = [1, 0, -1+\sqrt{3}, 0]^T$ iz (*) sledi, da je $\underline{\vec{x}, \vec{y} \in V}$, ampak

$\vec{x}+\vec{y} = [1, 1, -1+2\sqrt{3}, 0]^T$, (*): $-2-3+(-1+2\sqrt{3})^2 + 2 - 2 + 4\sqrt{3} = -5 + 4\sqrt{3} + 1 + 12 - 4\sqrt{3} = 8 \neq 0 \Rightarrow \underline{\vec{x}+\vec{y} \notin V}$

Opomba: Če je $\|A\vec{x}\| = \|2\vec{x}\|$ (tj. $\vec{x} \in V$), potem je tudi $\|A(\alpha\vec{x})\| = \|\alpha(A\vec{x})\| = \alpha\|A\vec{x}\| = \alpha\|2\vec{x}\| = \|\alpha(2\vec{x})\| = \|2(\alpha\vec{x})\|$,
V je zaprt za množenje s skalarjem!

b) (12) Za vektorski podprostor iz prejšnje točke poišči bazo in določi njegovo dimenzijo.

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ 2x_3 \\ x_1+x_3 \\ 2x_4 \end{bmatrix} \qquad 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \\ 2x_4 \end{bmatrix}$$

Če je $A\vec{x} = 2\vec{x}$, je $\underbrace{x_1+x_2 = 2x_1}_{x_2 = x_1}$, $\underbrace{2x_3 = 2x_2}_{x_2 = x_3}$, $\underbrace{x_1+x_3 = 2x_3}_{x_1 = x_3}$, $\underbrace{2x_4 = 2x_4}_{\checkmark}$, torej je

$W = \{\vec{x} ;\ x_1 = x_2 = x_3\} = \{ \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_4 \end{bmatrix}^T ;\ x_1, x_4 \in \mathbb{R}\}$.

$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \Rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ je baza za W, $\dim W = 2$.