Predavanja 12

Dvanajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

5. januar 2022

Robni problemi - strelska metoda

Rešujemo sistem DE

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \\ y(a) = A&, \quad y(b) = B. \end{aligned}$$

V tem primeru ne moremo uporabiti dosedanjih metod, saj nimamo podanih vrednosti y in z v isti točki.

Opravka imamo z robnim problemom. Za uporabo že izpeljanih metod potrebujemo vrednost $z(a)$. Iščemo torej vrednost $z(a) =: \alpha$, tako da bo rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z), \\ z' &= g(x, y, z), \\ y(a) = A&, \quad z(a) = \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

zadoščala $y(b) = B$.

Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki α iz (1) preslika v $y_\alpha(b) - B$, kjer je y_α rešitev (1). Iščemo torej ničlo funkcije F. Uporabimo lahko eno od metod za reševanje nelinearnih enačb, npr. sekantno metodo. Izberemo začetna približka α_0, α_1, nato pa s sekantno metodo iterativno izboljšujemo približek α za ničlo F.

Algoritem:
https://zalara.github.io/strelska.m

Primer:
https://zalara.github.io/demo691.m

DE višjega reda

Naj bo

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \tag{2}$$

DE reda m.

Uvedemo nove funkcije

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \ldots, y_m = y^{(m-1)}.$$

Potem se enačba (2) prevede v sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{m-1}' &= y_m, \\ y_m' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

ki ga lahko rešimo z metodami za sisteme DE prvega reda.

Problem lastnih vrednosti matrik

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Za kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je število $\lambda \in \mathbb{C}$ lastna vrednost, če obstaja tak neničelni vektor $v \in \mathbb{R}^n$, ki zadošča

$$Av = \lambda v. \tag{3}$$

Takemu vektorju rečemo lastni vektor, pripadajoč λ.

Trditev

Lastne vrednosti matrike A so vse različne ničle karakterističnega polinoma

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

Dokaz.

Pogoj (3) lahko preoblikujemo v $v \in \ker(A - \lambda I)$. Torej mora biti $\det(A - \lambda I) = 0$. Ker je

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

trditev sledi. $\square$

Jordanova forma

Nekatere matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ imajo n različnih lastnih vrednost $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in pripadajočih lastnih vektorjev $x_1, \ldots, x_n$.

Trditev

Če ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ same različne lastne vrednosti, potem so pripadajoči lastni vektorji paroma pravokotni in zato baza prostora $\mathbb{R}^n$.

Če poljuben vektor x razvijemo po bazi x_i, $i = 1, \ldots, n$, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i,$$

potem je

$$Ax = A\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i x_i.$$

V tem primeru se torej matrika A obnaša kot diagonalna matrika

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sta podobni, če obstaja obrnljiva matrika $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, da velja $B = SAS^{-1}$.

V splošnem pa je vsaka matrika podobna matriki, ki je direktna vsota Jordanskih kletk

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Jordanska forma je najenostavnejša oblika splošne matrike. Z njo je enostavno računati. Izračun Jordanske forme pa ni numerično stabilen, zato se za velike matrike v praksi ne uporablja.

Iskanje dominantne lastne vrednosti

Definicija

Lastna vrednost λ_1 *je dominantna, če za vse ostale lastne vrednosti* $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *velja*

$$|\lambda_1| > |\lambda_i|, \quad i = 2, \ldots, n.$$

V mnogih problemih nas zanima samo dominantna lastna vrednost, npr. v Googlovem PageRank algoritmu, kar bomo kmalu videli.

Dominantnno lastno vrednost pa lahko enostavno poiščemo z uporabo potenčne metode:

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ `zacetni vektor`
$ls = \max_i |x_i^{(0)}|$
$x^{(0)} = \frac{1}{ls} x^{(0)}$
for $k = 1 : N$
    $x^{(k)} = A x^{(k-1)}$
    $ln = \max_i |x_i^{(k)}|$
    $x^{(k)} = \frac{1}{ln} x^{(k)}$
end
$\lambda = ln$
$x = x^{(N)}$

Trditev

Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n lastnih vrednosti, pri čemer je največja dominantna. Zaporedje vektorjev $x^{(k)}$ iz potenčne metode konvergira proti lastnemu vektorju, ki pripada dominantni lastni vrednosti.

Dokaz.

Zapišimo $x^{(0)}$ po bazi $\{x_1, \ldots, x_n\}$ lastnih vektorjev: $x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$.
Potem je:

$$
\begin{aligned}
A^k x^{(0)} &= A^k \big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \big) = A^{k-1} \big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i x_i \big) = A^{k-2} \big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^2 x_i \big) \\
&= \cdots = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^k x_i = \lambda_1^k \Big(\beta_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \Big)^k \beta_i x_i \Big).
\end{aligned}
$$

Sledi

$$
\frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|_\infty} = \frac{\Big(\beta_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \big)^k \beta_i \Big)}{\|\Big(\beta_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} \big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \big)^k \beta_i \Big)\|_\infty}
$$

Ker je $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, velja $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \to 0$. Zato potenčna metoda res konvergira proti lastnemu vektorju x_1. $\square$

PageRank algoritem

Spletni iskalnik Google sta leta 1998 zagnala Sergey Brin in Larry Page. Iskalnik spletne strani oštevilči glede na njihovo pomembnost. Ko vpiše v iskalno polje neko besedno zvezo, potem iskalnik poišče vse spletne strani, kjer se pojavi ta besedna zveza, rezultate pa razvrsti glede na ta vrstni red pomembnosti, pri čemer višje izpiše tiste spletne strani, ki imajo nižjo številko.

Algoritem za številčenje spletnih strani se imenuje PageRank algoritem. Izkaže se, da algoritem temelji na iskanju lastnega vektorja dominantne lastne vrednosti Googlove matrike sosednosti.

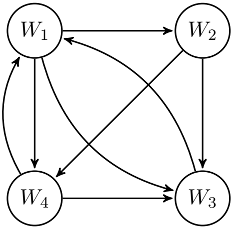
Splet pa lahko predstavimo kot velik usmerjen graf.

Vsaki spletni strani priredimo vozlišče grafa. Dve vozlišči u, v povežemo z usmerjeno povezavo, če iz spletne strani u vodi povezava na stran v.

Število usmerjenih povezav iz strani v_i označimo z O_i.

Matrika sosednosti H grafa ima stolpce/vrstice označene z vozlišči v_i grafa. Na mestu ij pa stoji $\frac{1}{O_j}$. Torej so v j-tem stolpcu neničelni vhodi v vrsticah strani v_i, v katere vodi usmerjena povezava iz v_j.

Primer



Matrika sosednosti grafa na sliki je enaka

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teža oz. pomembnost x_k spletne strani v_k pa je enaka

$$x_k = \sum_{i \in I_k} \frac{x_i}{O_i}, \tag{4}$$

pri čemer je I_k množica vseh spletnih strani, ki vodijo na stran v_k.

Enačbe (4) zapišemo s pomočjo matrike sosednosti kot

$$x = Hx,$$

kjer je x vektor pomembnosti. Torej moramo najti lastni vektor matrike H, ki pripada lastni vrednosti 1.

Vprašanje: Ali tak vektor sploh obstaja? Tj. ali je 1 gotovo lastna vrednost matrike H?

Ne nujno. Če malo popravimo matriko H s smiselnim oponašanjem naključnega uporabnika spleta, pa je odgovor da, kot bomo kmalu videli.

Nekaj definicij

Definicija

Matrika $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitivna, če ja* $a_{ij} \geqslant 0$ *za vsaka* $i, j = 1, \ldots, n$.

Definicija

Matrika $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je razcepna, če obstaja neka permutacija stolpcev/vrstic, da je permutirana matrika oblike*

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

kjer sta A_{11}, A_{22} *kvadratni matriki,* 0 *je ničelni blok in* A_{12} *je pravokotni blok. Če matrika ni razcepna, ji pravimo nerazcepna.*

Definicija

Matrika $A = [a_{ij}]_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je vrstično stohastična, če je* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ *za vsak* $i = 1, \ldots, n$. *Z drugimi besedami, vsota vhodov v vsaki vrstici je enaka 1.*

Podobno je matrika A *stolpično stohastična, če je vsota vhodov v vsakem stolpcu enaka 1.*

Izrek (Perron-Frobeniusov izrek, 1912)

Naj bo A pozitivna nerazcepna matrika, ki je vrstično ali stolpično stohastična. Potem je 1 dominantna lastna vrednost matrike A, obstaja pa pripadajoč lastni vektor s samimi nenegativnimi elementi.

Uporaba za PageRank algoritem: Matrika sosednosti H svetovnega spleta je pozitivna, ni pa nujno nerazcepna in stolpično stohastična. Graf namreč lahko razpade na več komponent za povezanost, ki dajo razcepnost matrike. Poleg tega lahko obstajajo ‘slepe’ spletne strani, iz katerih ni nobene izhodne povezave.

Rešitev problema razcepnosti in stohastičnosti matrike H: Matriko H malo popravimo:

$$\widetilde{H} = \alpha H + (1-\alpha)\frac{1}{N}S,$$

kjer je $\alpha \in (0,1)$ utež, N je število spletnih strani, S pa matrika samih 1. Matrika $\frac{1}{N}S$ oponaša korak uporabnika spleta, ko na nekem koraku iz trenutne strani skočimo naključno z verjetnostjo $\frac{1}{N}$ na poljubno drugo stran.

Matrika $\widetilde{H}$ je očitno nerazcepna in stolpično stohastična. Po Perron-Frobeniusovem izreku obstaja x s samimi nenegativnimi vhodi, da velja

$$\widetilde{H}x = x.$$

Glede na vhode v x Google rangira spletne strani po pomembnosti. Vektor x lahko poiščemo s potenčno metodo.

Hitrost konvergence potenčne metode v odvisnosti od α. Glede na α je konvergenca metode različno hitra.

Za $\alpha = 0.5$ je konvergenca zagotovljena že po nekaj korakih potenčne metode, vendar ima naključni skok v tem primeru prevelik vpliv in matrika $\widetilde{H}$ ne oponaša dobro uporabnika spleta, ki naključno brska po spletu, dokler se ne naveliča in zamenja tok brskanja.

Za $\alpha = 0.99$ je konvergenca prepočasna za praktično uporabo.

Navadno se navaja, da Google uporablja $\alpha \approx 0.8$, ki je nek kompromis med hitrostjo in smiselnostjo.

Več informacij o vplivu α si lahko preberete v zanimivi knjigi:

Amy Langville, Carl Meyer, *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*, Princeton University Press, 2006.