Predavanja 11

Enajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

4. januar 2022

Metoda Runge-Kutta reda 4

Butcherjeva tabela:

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Metoda je

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4, \\
k_1 &= hf(x_n, y_n), \\
k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1), \\
k_3 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2), \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3).
\end{aligned}
$$

Algoritem: `https://zalara.github.io/RK4.m`

Ocenjevanje napake in kontrola koraka

1. Pri računanju nas zanima velikost globalne napake.
2. Med izvajanjem metode ocenjujemo velikost lokalnih napak.
3. Na velikost lokalnih napak ključno vpliva izbira dolžine koraka.

Naj bo M metoda reda p, s katero izračunamo $y(x_{n+1})$ z dolžino koraka h. Približek označimo z $y_{n+1,h}$. Velja:

$$\ell_{n+1} := y_{n+1,h} - z(x_{n+1}) \approx Ch^{p+1}, \tag{1}$$

kjer je $z(x)$ rešitev začetnega problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_n) = y_n. \tag{2}$$

Podobno velja:

$$\ell_{n+1} = y_{n+1,h/2} - z(x_{n+1}) \approx C(h/2)^{p+1} + C(h/2)^{p+1} = 2^{-p}Ch^{p+1}, \tag{3}$$

saj smo pri koraku $h/2$ naredili dva koraka metode.

Odštejemo (3) od (1) in dobimo

$$y_{n+1,h} - y_{n+1,h/2} \approx Ch^{p+1}(1 - 2^{-p}). \tag{4}$$

Iz (4) izrazimo Ch^{p+1} in dobimo

$$Ch^{p+1} \approx \frac{y_{n+1,h} - y_{n+1,h/2}}{1 - 2^{-p}}. \tag{5}$$

1. Če je $|\ell_{n+1}| < \epsilon h$, potem $y_{n+1,h}$ sprejmemo.
   V vsaki točki namreč omejimo napako na ϵ. Na celem intervalu integriramo torej napako največ ϵ in dobimo mejo ϵh.
2. Če je $|\ell_{n+1}| \geqslant \epsilon h$, potem ponovimo računanje približka $y(x_{n+1})$ s krajšim korakom.
3. Če je $|\ell_{n+1}|$ bistveno manjši od ϵh, lahko v nadaljevanju uporabimo daljši korak.

Spreminjanje dolžine koraka

Recimo, da rešujemo DE z metodo reda p, Torej je lokalna napaka

$$\ell_n \approx C h_n^{p+1}. \tag{6}$$

Na naslednjem koraku želimo, da je napaka sorazmerna dolžini koraka:

$$C h_{n+1}^{p+1} \approx \epsilon h_{n+1}. \tag{7}$$

Izrazimo C iz (6), vstavimo v (7) in dobimo

$$\frac{h_{n+1}^{p+1}}{h_n^{p+1}} \approx \frac{\epsilon h_{n+1}}{|\ell_n|}.$$

Dolžina naslednjega koraka naj bo zato

$$h_{n+1} = h_n \sqrt[p]{\frac{\epsilon h_n}{|\ell_n|}}.$$

Zaradi zaokroževanja desno stran pomnožimo še s $\sigma \approx 1$, npr. $\sigma = 0.9$.

Metoda vgnezdenih parov za oceno ℓ_n

Naj bosta M_1, M_2 dve metodi Runge-Kutta z istima matrikama koeficientov $a_{i,j}$ (in zato c_i), vendar različnima vektorjema uteži b_i in b_i^*. Naj bo prva metoda reda p, druga pa $p+1$.

Primer

Metodo vgnezdenih parov uporabimo za Butcherjevi tabeli:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

Prva metoda je Eulerjeva, reda 1*, druga pa reda RK reda 2. Velja*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_1, \\ y_{n+1}^* &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Ocena lokalne napake je

$$\ell_{n+1} \approx y_{n+1}^* - y_{n+1} = (-k_1 + k_2)/2.$$

DOPRI5, Fehlberg, Cash-Karp

Zelo uporabne metode za praktično računanje so metode DOPRI5 (1980, avtorja Dormand in Prince), Fehlberg (1969), Cash-Karp, ki z metodo gnezdenih parov združi dve RK metodi, eno reda 4 in eno reda 5:

https://en.wikipedia.org/wiki/Dormand%E2%80%93Prince_method

https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta%E2%80%93Fehlberg_method

https://en.wikipedia.org/wiki/Cash%E2%80%93Karp_method

Algoritem:

https://zalara.github.io/DOPRI5.m

Linearne večkoračne metode

Za nekatere funkcije (npr. zelo strme ali hitro oscilirajoče funkcije na intervalu $[x_n, x_{n+1}]$) Runge-Kutta metode ne dajo dobrih približkov oz. ne konvergirajo dovolj hitro.

Možna rešitev je uporaba veččlenskih metod, ki poleg vrednosti $y(x_n)$, $f(x_n, y(x_n))$, uporabijo še približke za vrednosti

$$y(x_{n-1}), \ldots, y(x_{n-i})$$

in

$$f(x_{n-1}, y(x_{n-1})), \ldots, f(x_{n-i}, y(x_{n-i})).$$

Izračun $y(x_{n+1})$ temelji na osnovnem izreku integralskega računa:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx. \tag{11}$$

V nadaljevanju naj bo h dolžina koraka, y_i približek za $y(x_i)$, f_i pa oznaka za $f(x_i, y_i)$.

Adams-Bashforthove metode oz. AB metode

Naj bo $p_{k-1}(x)$ interpolacijski polinom stopnje $k-1$ skozi točke

$$(x_n, f_n),\ (x_{n-1}, f_{n-1}),\ \ldots,\ (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}).$$

Potem (11) izračunamo kot

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} p_{k-1}(x)dx. \tag{12}$$

Izkaže se, da je

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = h(\beta_1 f_n + \beta_2 f_{n-1} + \ldots + \beta_k f_{n-k+1}), \tag{13}$$

kjer koeficiente β_i preberemo iz naslednje tabele:

k	i	1	2	3	4	C_{k+1}
1	β_i	1				$\frac{1}{2}$
2	$2\beta_i$	3	-1			$\frac{5}{12}$
3	$12\beta_i$	23	-16	5		$\frac{3}{8}$
4	$24\beta_i$	55	-59	37	-9	$\frac{251}{720}$

.

Pri tem je lokalna napaka ocene y_{n+1} enaka

$$C_{k+1} h^{k+1} y^{(k+1)}(\xi_n), \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1}).$$

Vrstico 3 tabele preberemo kot

$$h\Big(\frac{23}{12} f_n - \frac{16}{12} f_{n-1} + \frac{5}{12} f_{n-2}\Big),$$

lokalna napaka ocene pa je

$$\frac{251}{720} h^4 y^{(4)}(\xi_n), \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1}).$$

Algoritem:

https://zalara.github.io/AB4.m

Adams-Moultonove metode oz. AM metode

Naj bo $q_k(x)$ interpolacijski polinom stopnje k skozi točke

$$(x_{n+1}, f_{n+1}),\ (x_n, f_n),\ \ldots,\ (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}).$$

Potem (11) izračunamo kot

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} q_k(x)dx. \tag{14}$$

Izkaže se, da je

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = h(\beta_0^* f_{n+1} + \beta_1^* f_n + \ldots + \beta_k^* f_{n-k+1}), \tag{15}$$

kjer koeficiente β_i^* preberemo iz naslednje tabele:

k	i	1	2	3	4	C_{k+1}
0	β_i^*	1				$-\frac{1}{2}$
1	$2\beta_i^*$	1	1			$-\frac{1}{12}$
2	$12\beta_i^*$	5	8	-1		$-\frac{1}{24}$
3	$24\beta_i^*$	9	19	-5	1	$-\frac{19}{720}$

.

Pri tem je lokalna napaka ocene y_{n+1} enaka

$$C_{k+1}h^{k+2}y^{(k+1)}(\xi_n), \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1}).$$

Vrstico 3 tabele preberemo kot

$$h\Big(\frac{5}{12}f_{n+1} + \frac{8}{12}f_n - \frac{1}{12}f_{n-1}\Big),$$

lokalna napaka ocene pa je

$$-\frac{1}{24}h^4 y^{(3)}(\xi_n), \quad \xi_n \in (x_n, x_{n+1}).$$

Opazimo, da pri AB metodah y_{n+1} eksplicitno izračunamo, pri AM metodah pa y_{n+1} nastopa na obeh straneh (15). Tako ga moramo izračunati s pomočjo ene od metod za reševanje nelinearnih enačb. V praksi se uporabi navadno interacijo. Če za začetni približek uporabimo AB metodo, nato pa naredimo korak AM metode, dobimo metodo prediktor-korektor.

Algoritem:

`https://zalara.github.io/predkor4.m`

`https://zalara.github.io/primer_resevanja_DE.m`

Sistemi diferencialnih enačb

Sistem DE je oblike:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_m),\\
y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_m),\\
&\vdots\\
y_m' &= f_m(x, y_1, \ldots, y_m),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

kjer so $y_1(x)$, ..., $y_m(x)$ neznane funkcije. Imamo še m začetnih pogojev $y_i(x_0) = y_{i,0}$ za $i = 1, \ldots, m$. Sistem (16) lahko zapišemo v vektorski obliki:

$$\vec{y} = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \tag{17}$$

kjer so

$$
\begin{aligned}
\vec{y} &= (y_1, \ldots, y_m), \quad \vec{f} = (f_1, \ldots, f_m),\\
\vec{y}(x_0) &= (y_1(x_0), \ldots, y_m(x_0)).
\end{aligned}
$$

Sistem (17) lahko rešujemo z Runge-Kutta metodami oz. AB, AM metodami z praktično isto implementacijo, le da vse funkcije podamo kot vektorske funkcije, točke pa kot vektorje.

Algoritem:

https://zalara.github.io/RK4sis.m
https://zalara.github.io/predkor4sis.m

Primer:

https://zalara.github.io/sistem.m