Predavanja 10

Deseti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

19. december 2021

Osnovna Newton-Cotesova pravila na $[a,b]$

Newton-Cotesova pravila interval $[a,b]$ razdelijo z $n+1$ ekvidistantnimi točkami in $\int_a^b f(x)dx$ aproksimirajo z $\int_a^b p_n(x)dx$, kjer je p_n interpolacijski polinom stopnje n na teh točkah.

ime	n	formula
trapezno	1	$\frac{(b-a)}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$
Simp. 1/3	2	$\frac{(b-a)}{6}\left[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right]$
Simp. 3/8	3	$\frac{(b-a)}{8}\left[f(a)+3f(a+h)+3f(b-h)+f(b)\right]$
Booleovo	4	$\frac{(b-a)}{90}\left[7f(a)+32f(a+h)+12f(\frac{a+b}{2})+32f(b-h)+7f(b)\right]$

Ocene napak:

ime	n	napaka	h
trapezno	1	$-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$	$b-a$
Simp. 1/3	2	$-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\xi)$	$(b-a)/2$
Simp. 3/8	3	$-\frac{b-a}{80}h^4f^{(4)}(\xi)$	$(b-a)/3$
Booleovo	4	$-\frac{2(b-a)}{945}h^6f^{(6)}(\xi)$	$(b-a)/4$

Rombergova metoda

Naj bo $T(h)$ aproksimacija integrala $I = \int_a^b f(x)\, dx$ z uporabo sestavljenega trapeznega pravila s korakom h.

Rombergova metoda s pomočjo vrednosti

$$T(h),\ T(h/2),\ T(h/2^2),\ \ldots,\ T(h/2^k),$$

ki imajo napako $\mathcal{O}((h/2^i)^2)$, zgradi boljši približek

$$T_k(h/2^k)$$

za I, katerega napaka je $\mathcal{O}((h/2^k)^{2(k+1)})$.

Vrednost $T_k(h/2^k)$ dobimo z rekurzivnim računanjem stolpcev od levega proti desnemu v spodnji triktoni shemi:

$$\begin{array}{cccccc}
T(h) & & & & & \\
T(h/2) & T_1(h/2) & & & & \\
T(h/2^2) & \color{blue}{T_1(h/2^2)} & T_2(h/2^2) & & & \\
T(h/2^3) & \color{orange}{T_1(h/2^3)} & \color{red}{T_2(h/2^3)} & T_3(h/2^3) & & \\
T(h/2^4) & T_1(h/2^4) & T_2(h/2^4) & T_3(h/2^4) & T_4(h/2^4) & \\
\vdots & & & & & \ddots \\
T(h/2^k) & T_1(h/2^k) & T_2(h/2^k) & \cdots & \cdots & T_{k-1}(h/2^{k-1}) \quad T_k(h/2^k).
\end{array}$$

Pri tem uporabljamo formulo:

$$\boxed{T_m(h/2^\ell) = \frac{4^m T_{m-1}(h/2^\ell) - T_{m-1}(h/2^{\ell-1})}{4^m - 1}}, \quad \ell = m, m+1, m+2, \ldots, k.$$

Vrednost $T_m(h/2^\ell)$ izračunamo tako, da:

- pomnožimo element levo od njega z utežjo $\frac{4^m}{4^m - 1}$
- odštejemo element za eno levo in eno navzgor pomnožen z utežjo $\frac{1}{4^m - 1}$.

Algoritem:

https://zalara.github.io/Rombergova.m

Natančnejša izpeljava za radovedne:

https://zalara.github.io/Rombergova-metoda.pdf

Integracija v več dimenzijah

Ločili bomo primera:

1. Zanima nas $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$, kjer je $\Omega = [a,b]\times[c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokotnik.
2. Zanima nas $\int_\Omega f(\underline{x})\,d\Omega$, kjer je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ poljubno območje v $\mathbb{R}^d$.

V prvem primeru lahko uporabimo dve sestavljeni pravili za vsako spremenljivko posebej. Naj bosta

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

in

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$$

delitvi intervalov $[a,b]$ in $[c,d]$ na n enakih delov in $h = \frac{b-a}{n}$, $k = \frac{d-c}{n}$. Če uporabimo sestavljeni trapezni pravili dobimo:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} (f(x_i,y) + f(x_{i+1},y)) \right) dy$$

$$= \frac{hk}{4} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i,y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i+1},y_{j+1}) \right)$$

Izkaže se, da pomnožimo istoležne koeficiente v tabeli funkcijskih vrednosti

$$\left(\begin{array}{cccccc} f(x_n, y_0) & f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \cdots & f(x_n, y_{n-1}) & f(x_n, y_n) \\ f(x_{n-1}, y_0) & f(x_{n-1}, y_1) & f(x_{n-1}, y_2) & \cdots & f(x_{n-1}, y_{n-1}) & f(x_{n-1}, y_n) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \\ f(x_1, y_0) & f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \cdots & f(x_1, y_{n-1}) & f(x_1, y_n) \\ f(x_0, y_0) & f(x_0, y_1) & f(x_0, y_2) & \cdots & f(x_1, y_{n-1}) & f(x_0, y_n) \end{array}\right),$$

s tabelo koeficientov

$$\frac{hk}{4} \cdot \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \end{array}\right) = \frac{hk}{4} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 & 1 \end{array}\right)$$

in seštejemo vse vrednosti v dobljeni matriki.

Če bi namesto sestavljenega trapeznega pravila uporabili Simpsonovega, bi morali za tabelo koeficientov vzeti

$$\frac{hk}{9} \cdot uu^T,$$

kjer je $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $k = \dfrac{d-c}{2n}$ in $u^T = \left(\begin{array}{ccccccccc} 1 & 4 & 2 & 4 & 2 & \cdots & 4 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

V drugem primeru uporabimo Monte Carlo metode, ki temeljijo na dejstvu, da velja

$$\int_\Omega f(x_1, \dots, x_d)\, d\Omega = \mathrm{Vol}(\Omega) \cdot E_\Omega(f(X_1, \dots, X_d)),$$

kjer je $\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega 1\, d\Omega$ volumen območja Ω, $X = (X_1, \dots, X_d) : \Omega \to \Omega$ slučajni vektor, E_Ω pa pričakovana vrednost slučajne spremenljivke $f(X_1, \dots, X_d)$. Naključno moramo torej vzorčiti na območju Ω, nato pa izračunati povprečje funkcijskih vrednosti. Za dovolj veliko naključnih točk bo povprečje dobra ocena za vrednost integrala.

Poglavje 6

Numerično reševanje diferencialnih enačb

Diferencialna enačba

Diferencialna enačba (DE) je enačba oblike:

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0,$$

če je $x = x(t)$ ali

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

če je $y = y(x)$.

V DE poleg neodvisne spremenljivke t (oz. x) in odvisne spremenljivke x (oz. y) nastopajo še odvodi odvisne spremenljivke $\dot{x}$, …, $x^{(n)}$ (oz. y', …, $y^{(n)}$).

Rešitev DE je (dovoljkrat odvedljiva) funkcija, ki zadošča enačbi.

Red DE je stopnja najvišjega odvoda, ki nastopa v DE.

Primer

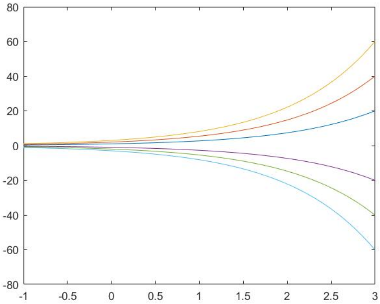
- $y' = y, \quad y' + 5xy = 3x^2$
- $\dot{x} + x = 0, \quad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = A\cos\omega t$

Splošna rešitev diferencialne enačbe reda n je družina funkcij, odvisna od n parametrov, ki so vse rešitve diferencialne enačbe.

Primer

Rešimo DE $y' = y$.

$$\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\Rightarrow \quad \log(|y|) = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad y = Ke^x, \quad K \in \mathbb{R}$$



Partikularna rešitev je posamezna rešitev iz te družine.
Določena je z n dodatnimi pogoji, na primer z začetnimi pogoji:

$$x(t_0) = a_0, \quad \dot{x}(t_0) = a_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = a_{n-1}$$

Zelo malo DE je analitično rešljivih. Mednje sodijo:

- DE z ločljivima spremenljivkama
- Linearne DE
- DE zelo posebne oblike

Večina DE ni analitično rešljivih. Te rešujemo numerično.

Numerično reševanje DE

Na intervalu $[a, b]$ rešujemo DE prvega reda

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0. \tag{1}$$

Interval $[a, b]$ razdelimo z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Z y_i označimo približek za rešitev (1) v točki x_i. Označimo dolžino koraka z $h_i := x_{i+1} - x_i$.

Razliko med približkom in točno rešitvijo v x_i pišemo z $g_i = y_i - y(x_i)$ in jo imenujemo globalna napaka v x_i.

Razliko med približkom in točno rešitvijo DE

$$z' = f(x, z), \quad z(x_{i-1}) = y_{i-1} \tag{2}$$

v x_i pišemo z $\ell_i = y_i - z(x_i)$ in jo imenujemo lokalna napaka v x_i.

Globalno napako lahko ocenimo s pomočjo lokalnih napak:

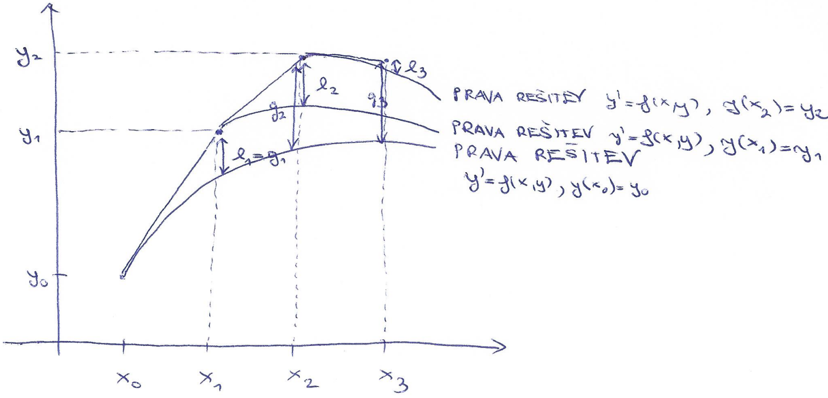
$$|g_i| \leqslant |\ell_1| + |\ell_2| + \ldots + |\ell_i|.$$

Red metode je število $p \in \mathbb{N}$, ki zadošča $\ell_i = Ch_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_n^{p+2})$ za vsak $i = 1, \ldots, n$.

Eulerjeva metoda

Pri tej metodi v vsaki točki x_i uporabimo linearno aproksimacijo funkcije. Rešitev na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ nadomestimo z odsekom tangente na graf rešitve v točki x_i:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i).$$



Koda 1: Algoritem Eulerjeve metode

```
funkcija f(x,y), interval [a,b], vrednost y(a) = y_0

y = y_0
x = x_0
h = (b - a)/n
for i = 1, ..., n-1
    y = y + h · f(x,y)
    x = x + h
end
```

Ker je

$$y(x+h) = \underbrace{y(x) + hy'(x)}_{\text{upoštevamo}} + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(\xi)}_{\text{napaka}}, \quad \xi \in [x, x+h],$$

je red Eulerjeve metode 1.

Metode Runge-Kutta

Ideja teh metod je, da za aproksimacijo odvoda na intervalu $[x_n, x_{n+1}]$ ne upoštevamo odvoda le v točki x_n, temveč neko uteženo povprečje odvodov na $[x_n, x_{n+1}]$.

Primer (Metode Runge-Kutta (RK) reda 2)

Upoštevamo odvoda v točki x_n in $x_n + ch \in [x_n, x_{n+1}]$, kjer je $h = x_{n+1} - x_n$ in $c \in [0, 1]$. Približek y_{n+1} izračunamo tako, da se premaknemo za uteženo povprečje premikov po tangentah v točkah x_n in $x_n + ch$:

$$y_{n+1} = y_n + \underbrace{b_1}_{\text{utež}} \cdot \underbrace{(h \cdot f(x_n, y_n))}_{\text{tangenta v } x_n} + \underbrace{b_2}_{\text{utež}} \cdot \underbrace{(h \cdot f(x_n + ch, y(x_n + ch)))}_{\text{tangenta v } x_n + ch} \tag{3}$$

Upoštevamo

$$y(x_n + ch) \approx y_n + chy'(x_n) = y_n + chf(x_n, y_n) \approx y_n + ahf(x_n, y_n), \tag{4}$$

kjer je a postal prost parameter.

Primer (Metode Runge-Kutta (RK) reda 2)

Upoštevamo (4) *v* (3) *in dobimo*

$$y_{n+1} = y_n + b_1 \cdot \underbrace{(h \cdot f(x_n, y_n))}_{k_1} + b_2 \cdot \underbrace{(h \cdot f(x_n + ch, y_n + a \cdot k_1))}_{k_2}. \quad (5)$$

Z razvojem funkcije $y(x_n + h)$ *in* $f(x_n + ch, y_n + ak_1)$ *v Taylorjevi vrsti in primerjavo koeficientov pri* h *in* h^2 *v* (5) *dobimo pogoja*

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 + b_2, \\ \frac{1}{2}(f_x + f_y f)_n &= b_2 c (f_x)_n + b_2 a (f f_y)_n, \end{aligned} \quad (6)$$

kjer f_n, $(f_x)_n$, $(f_y)_n$ *pomenijo* $f(x_n, y_n)$, $f_x(x_n, y_n)$, $f_y(x_n, y_n)$. *Enačbi* (6) *imata veliko rešitev, npr.:*

- $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ *in* $c = a = 1$. *RK metoda je:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1). \end{aligned}$$

Primer (Metode Runge-Kutta (RK) reda 2)

- *$b_1 = 1$, $b_2 = 0$ in $c = a = \frac{1}{2}$. RK metoda je:*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_2, \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1). \end{aligned}$$

Splošna RK metoda je oblike

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2 + \ldots + b_s k_s, \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + c_2 h, y_n + a_{2,1} k_1), \\ k_3 &= hf(x_n + c_3 h, y_n + a_{3,1} k_1 + a_{3,2} k_2), \\ &\vdots, \\ k_s &= hf(x_n + c_s h, y_n + a_{s,1} k_1 + \ldots + a_{s,s-1} k_{s-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

Butcherjeva tabela

RK metode (7) v kompaktni obliki shranjujemo v Butcherjevi tabeli:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & 0 & & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
c_s & a_{s_1} & a_{s_2} & a_{s,3} & \cdots & a_{s,s-1} & 0 \\
\hline
 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{s-1} & b_s,
\end{array}
$$

kjer je še

$$
\begin{aligned}
c_2 &= a_{2,1}, \\
c_3 &= a_{3,1} + a_{3,2}, \\
&\vdots \\
c_s &= a_{s,1} + a_{s,2} + \ldots + a_{s,s-1}.
\end{aligned}
$$