Predavanja 9

Deveti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

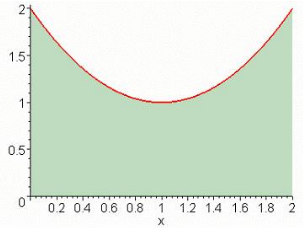
7. december 2021

Numerična integracija

Naš cilj je izračunati določen integral

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

funkcije $f(x)$. Tu je F nedoločen integral funkcije f.

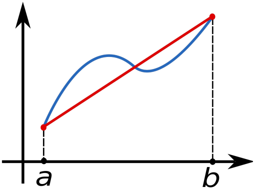


Če ne znamo izračunati nedoločenega integrala F, smo v težavah. Npr. za $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$, $h(x) = x \tan x$.

Prav tako ne moremo točno izračunati vrednosti integrala, če imamo funkcijo podano samo na neki množici točk.

Osnovno trapezno pravilo in napaka

Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ tako, da f aproksimiramo z linearno funkcijo in izračunamo ploščino pod linearno funkcijo oz. trapezom.



$$\boxed{p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)}$$

Velja

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} = \boxed{\frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))}.$$

$$E = \int_a^b (f(x) - p(x))\,dx = \int_a^b \frac{f''(\xi(x))}{2}(x-b)(x-a)\,dx = \frac{f''(\eta)}{2} \cdot \int_a^b (x-b)(x-a)\,dx$$

$$= \frac{f''(\eta)}{2}\left(-\frac{1}{6}(b-a)^3\right) = \boxed{-\frac{(b-a)^3 f''(\eta)}{12}},$$

kjer sta $\xi(x), \eta \in [a, b]$, tretja enakost sledi po izreku o povprečni vrednosti.

Sestavljeno trapezno pravilo in napaka

Če interval $[a, b]$ razdelimo z ekvidistantnimi točkami $x_0, x_1, \ldots, x_n$, tj.

$$h := h_i = x_{i+1} - x_i$$

je konstanta, dobimo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + f(x_{i+1})$$

$$= \boxed{\frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)}$$

Napaka E_i na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ je enaka

$$E_i = -\frac{h^3 \cdot f''(\eta_i)}{12} \qquad \text{za nek } \eta_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Torej je skupna napaka

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E_i = \sum_{i=0}^{n-1} -\frac{h^3 \cdot f''(\eta_i)}{12} = -n \cdot \frac{h^3 \cdot f''(\eta)}{12} = \boxed{-\frac{(b-a)h^2 \cdot f''(\eta)}{12}},$$

kjer je $\eta \in [a, b]$ in smo v tretji enakosti uporabili izrek o srednji vrednosti.

Algoritem: `https://zalara.github.io/trapezno.m`

Trapezno pravilo s kontrolo koraka

Motivacija. Če uporabimo sestavljeno trapezno pravilo, moramo:

- Vnaprej določiti velikost h.
- Če želimo oceniti napako, moramo znati oceniti $f''(\eta)$ na intervalu $[a, b]$.

Obe težavi želimo rešiti, tj. radi bi, da funkcija samo zmanjšuje h, v kolikor napaka ni dovolj manjka. V ta namen moramo znati to napako oceniti. Pridemo do trapeznega pravila s kontrolo koraka, ki je razloženo spodaj.

Naj bo $I = \int_a^b f(x)dx$ in $T(h)$ ocena za I z uporabo sestavljenega trapeznega pravila z velikostjo intervala h.

Spomnimo se, da pri sestavljenem trapeznem pravilu $T(h)$ za napako $E(h)$ velja:

$$E(h) := T(h) - I = \frac{b-a}{12} f''(\xi_h)h^2, \quad \text{kjer je } \xi_h \in (a, b).$$

Želimo se izogniti dejstvu, da moramo poznati f''. Zapišimo napako še v primeru razpolovljenega koraka, tj. $\frac{h}{2}$:

$$E(h/2) := T(h/2) - I = \frac{b-a}{12} f''(\xi_{h/2}) \frac{h^2}{4}, \quad \text{kjer je } \xi_{h/2} \in (a, b).$$

Predpostavimo, da je $\frac{b-a}{12} f''(\xi_h)$ približno enako C za vsak h:

$$I = T(h) - Ch^2 = T(h/2) - \frac{C}{4}h^2.$$

Algoritem trapeznega pravila s kontrolo koraka

```
funkcija f in interval [a,b], N stevilo korakov

h = b − a;   e = 4ϵ;   m = 0
T(h) = h ∗ (f(a) + f(b))/2
while m < N and |e|/3 > ϵ
   m = m + 1
   h = h/2
   k = 2^(m−1);   s = 0
   for i = 1 : k
        s = s + f(a + (2^i − 1)h)
   end
   e = s ∗ h − T/2
   T = T + e
end
if |e|/3 > ϵ
     T =NaN
end
```

Adaptivno trapezno pravilo

Motivacija. Če uporabimo trapezno pravilo s kontrolo koraka, potem dolžine koraka h ne rabimo sami določiti, vendar pa je h enak na celotnem integracijskem intervalu.
Želeli bi, da na nekaterih delih intervala uporabimo večje h, manjše pa le tam, kjer je to res potrebno.

Zgornji cilj lahko dosežemo z uporabo rekurzrivnega računanja integrala:

- Najprej izračunamo $T(b-a)$ in $T((b-a)/2)$.
- Če je podobno kot pri kontroli koraka zgoraj ocena napake $e := \frac{T(b-a)/2 - T(b-a)}{3}$ dovolj majhna, vrnemo $T((b-a)/2) + e$ in končamo.
- Če je e prevelik, ponovimo zgornji postopek ločeno za podintervala $[a, (a+b)/2]$ in $[(a+b)/2, b]$, pri čemer naj bo napaka na vsakem največ polovica začetne tolerance.
- Rekurzivno nadaljujemo zgornji postopek in dobimo oceno integrala, pri čemer delilne točke ne bodo enakomerno razporejene po intervalu $[a, b]$.

Algoritem:

https://zalara.github.io/trapeznoadaptivno.m

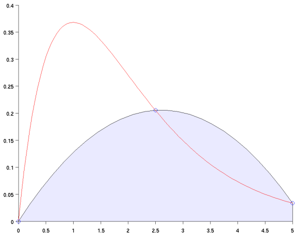
Spodnji klic nariše graf izbrane funkcije f in označi vse točke, kjer je bilo potrebno računati funkcijske vrednosti.

```
ezplot(f,[a,b]); hold on
[T,Nev,err]=trapeznoadaptivno(f,a,b,tol);
hold off
```

Enostavno Simpsonovo pravilo

Naj bo p_2 polinom stopnje 2, s katerim interpoliramo točke

$$(a, f(a)), \quad (\frac{a+b}{2}, \quad f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b)) :$$



$$\boxed{p_2(x) = C_0 + C_1 \cdot (x-a) + C_2 \cdot (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}.$$

Iz sistema $p_2(a) = f(a)$, $p_2(\frac{a+b}{2}) = f(\frac{a+b}{2})$, $p_2(b) = f(b)$ dobimo

$$C_0 = f(a), \quad C_1 = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad C_2 = \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}.$$

Označimo $h = \frac{b-a}{2}$. Računamo $\int_a^b p_2(x)dx$ (naredimo subsitucijo $x = a + t$);

$$
\begin{aligned}
& \int_a^{a+2h} p_2(x)\,dx = \int_0^{2h} p_2(a+t)\,dt \\
= \quad & f(a)\cdot 2h + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot 2h^2 + \frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{2h^2}\cdot\frac{2}{3}h^3 \\
= \quad & \boxed{\frac{h}{3}\big(f(a)+4f(a+h)+f(a+2h)\big)}.
\end{aligned}
$$

Izkaže se, da je napaka približno:

$$\boxed{-\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)}, \quad \xi \in [a,b]$$

Izpeljava za radovedne:

https://zalara.github.io/Enostavno_Simpsonovo_napaka.pdf

Algoritem sestavljenega Simpsonovega pravila (na naslednji strani):

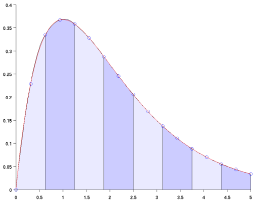
https://zalara.github.io/Simpsonovo.m

Sestavljeno Simpsonovo pravilo in napaka

Vzemimo ekvidistantno particijo $P = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ intervala $[a, b]$ na sodo število enako dolgih intervalov in na zaporednih trojicah točk uporabimo osnovno Simpsonovo pravilo ($h = x_{i+1} - x_i$):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]$$

$$= \boxed{\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]}.$$



Napaka E_i na intervalu $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ je enaka $E_i = -\frac{h^5 f^{(4)}(\eta_i)}{90}$ za nek $\eta_i \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$. Torej je skupna napaka

$$E = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} E_i = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} -\frac{h^5 f^{(4)}(\eta_i)}{90} = -\frac{n}{2}\,\frac{h^5 f^{(4)}(\eta)}{90} = \boxed{-\frac{(b-a)h^4 f''(\eta)}{180}},$$

kjer je $\eta \in [a, b]$ in smo v tretji enakosti uporabili izrek o srednji vrednosti.

Adaptivno Simpsonovo pravilo

Motivacija. Ideja je povsem enaka kot pri adaptivnem trapeznem pravilu, tj. radi bi uporabili čim večji h povsod, ljer je to mogoče. Če s $S(h)$ označimo vrednost sestavljenega Simpsonovega pravila s korakom dolžine h, potem napako e ocenimo iz $S(h)$ in $S(h/2)$.

Postopek:

- Najprej izračunamo $S(b-a)$ in $S((b-a)/2)$.
- Iz $\int_a^b f(x)dx = S(h) + C_1 h^4 = S(h/2) + C_1(\frac{h}{2})^4$ izrazimo
$$C_1 \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{S(b-a)/2 - S(b-a)}{15},$$
kar je naša ocena napake e. Če je e dovolj majhna, vrnemo $S((b-a)/2) + e$ in končamo.
- Če je e prevelik, ponovimo zgornji postopek ločeno za podintervala $[a, (a+b)/2]$ in $[(a+b)/2, b]$, pri čemer naj bo napaka na vsakem največ polovica začetne tolerance.
- Rekurzivno nadaljujemo zgornji postopek in dobimo oceno integrala, pri čemer delilne točke ne bodo enakomerno razporejene po intervalu $[a, b]$.

Algoritem:

https://zalara.github.io/simpsonovoadaptivno.m

Spodnji klic nariše graf izbrane funkcije *f* in označi vse točke, kjer je bilo potrebno računati funkcijske vrednosti.

```
ezplot(f,[a,b]); hold on
[S,Nev,err]=simpsonovoadaptivno(f,a,b,tol);
hold off
```

Še en primer integracije z uporabo različnih pravil:

https://zalara.github.io/primer.m