Predavanja 3

Linearni sistemi

Tretji sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

18. oktober 2021

Reševanje trikotnih sistemov

Spodnje in zgornjetrikotna matrika L in U imata naslednjo obliko:

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \ell_{n1} & & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trikotna sistema

$$Ly = b \qquad \text{in} \qquad Ux = c$$

zlahka rešimo s premo substitucijo oz. obratno substitucijo.

Prema substitucija - primer

Sistem

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

je ekvivalenten sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & & & & & = & 8 \\ y_1 & + & 3y_2 & & & = & 10 \\ 3y_1 & - & y_2 & - & 2y_3 & = & 4 \end{array}$$

Rešujemo v obratnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{8}{2} = 4, \\ y_2 &= \frac{1}{3}\left(10 - y_1\right) = \frac{6}{3} = 2, \\ y_3 &= \frac{1}{-2}\left(4 - 3y_1 + y_2\right) = \frac{-6}{-2} = 3. \end{aligned}$$

Prema substitucija in število operacij

```
spodnjetrikotna matrika L = [\ell_{ij}]_{i,j}, vektor b = [b_i]_i
x_1 = b_1/\ell_{11}
for i = 2 ... n
   s = b_i
   for j = 1 ... i-1
      s = s - \ell_{ij} x_j
   end
   x_i = s/\ell_{ii}
end
```

Število osnovnih računskih operacij:

- v prvi vrstici: $+:0,\ -:0,\ \times:0,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:1$
- v drugi vrstici: $+:0,\ -:1,\ \times:1,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:3$
- v tretji vrstici: $+:0,\ -:2,\ \times:2,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:5$
- vrstica j: $+:0,\ -:j-1,\ \times:j-1,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:2j-1$

Skupaj osnovnih računskih operacij: $\boxed{\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2}$.

Obratna substitucija - primer

Sistem

$$U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

je ekvivalenten sistemu

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ & & 3x_2 & + & -2x_3 & = & -1 \\ & & & & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

Rešujemo v obratnem vrstnem redu:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{8}{4} = 2, \\ x_2 &= \frac{1}{3}\left(-1 + 2x_3\right) = \frac{3}{3} = 1, \\ x_1 &= \frac{1}{-2}\left(9 - x_2 - 2x_3\right) = \frac{4}{-2} = -2. \end{aligned}$$

Obratna substitucija in število operacij

```
zgornjetrikotna matrika U = [u_ij]_{i,j}, vektor c = [c_i]_i
x_n = c_n / u_nn
for i = n-1 ... 1
   s = c_i
   for j = i+1 ... n
      s = s - u_ij x_j
   end
   x_i = s / u_ii
end
```

Število osnovnih računskih operacij:

- v zadnji vrstici: $+:0,\ -:0,\ \times:0,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:1$
- v predzadnji vrstici: $+:0,\ -:1,\ \times:1,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:3$
- v predpredzadnji vrstici: $+:0,\ -:2,\ \times:2,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:5$
- vrstica $-j$: $+:0,\ -:j-1,\ \times:j-1,\ /:1 \quad \Rightarrow \quad \sum:2j-1$

Skupaj osnovnih računskih operacij: $\boxed{\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2}$.

Gaussova eliminacija za reševanje $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x' & x' & x' \\ 0 & 0 & x'' & x'' \\ 0 & 0 & 0 & x''' \end{bmatrix}$$

Prvi korak:

$$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{11} = 0, \qquad a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}, \ldots \qquad a_{24} = a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{14},$$

$$a_{31} = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{11} = 0, \qquad a_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12}, \ldots \qquad a_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{14},$$

$$a_{41} = a_{41} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{11} = 0, \qquad a_{42} = a_{42} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{12}, \ldots \qquad a_{44} = a_{44} - \frac{a_{41}}{a_{11}} a_{14},$$

Drugi korak:

$$a_{32} = a_{32} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{22} = 0, \qquad a_{33} = a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{23}, \qquad a_{34} = a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{24},$$

$$a_{42} = a_{42} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{22} = 0, \qquad a_{43} = a_{43} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{22}, \qquad a_{44} = a_{44} - \frac{a_{42}}{a_{22}} a_{24},$$

Tretji korak:

$$a_{43} = a_{43} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{33} = 0, \qquad a_{44} = a_{44} - \frac{a_{43}}{a_{33}} a_{34}.$$

Koda 1: Gaussova eliminacija

```
Naj bosta dana n × n matrika A = [a_ij]_ij, in n × 1
    vektor b = [b_i]_i

for k = 1 ... n − 1
  for i = k + 1 ... n
    xmult = a_ik / a_kk
    a_ik = 0
    for j = k + 1 ... n
      a_ij = a_ij − (xmult) a_kj
    end
    b_i = b_i − (xmult) b_k
  end
end
```

Število osnovnih računskih operacij za GE matrike A:

Korak k	$\pm$	$\times$	$:$
1	$(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$n-1$
2	$(n-2)^2$	$(n-2)^2$	$n-2$
$\vdots$			
$n-1$	1	1	1
Skupaj	$\sum_{j=1}^{n-1} j^2$	$\sum_{j=1}^{n-1} j^2$	$\sum_{j=1}^{n-1} j$

Število osnovnih računskih operacij za spremembo vektorja b:

Korak k	$\pm$	$\times$
1	$n-1$	$n-1$
2	$n-2$	$n-2$
$\vdots$		
$n-1$	1	1
Skupaj	$\sum_{j=1}^{n-1} j$	$\sum_{j=1}^{n-1} j$

Velja

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{in} \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zato

$\pm$ za A	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
$\times$ za A	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$
: za A	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\pm$ za b	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\times$ in : za b	$\frac{n(n-1)}{2}$

Cena obratne substitucije:

$\pm$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$\times$ in :	$\frac{n(n+1)}{2}$

Seštejemo ceni obeh korakov (eliminacija vrstic in obratna substitucija) in dobimo

$\pm$	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$
$\times$ in :	$\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$

Torej je skupna cena vseh operacij

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).}$$

$\Rightarrow$ podvojen n povroči povečanje cene za faktor 8

LU razcep matrike A

Da lahko rešujemo sisteme $Ax = b$ pri fiksni matriki A za različne vektorje b in pri tem prihranimo na ceni računanja, je smiselno zapisovati koeficiente iz Gaussove eliminacija na ustrezna mesta v spodnjetrikotniku matriki L, tako da je na koncu $A = LU$, kjer je U končna zgornjetrikotna matrika iz GE.

```
A = [a_ij]_{i,j}  n × n  matrika

for k = 1, ..., n−1
   for i = k+1, ..., n
      ℓ_ik = a_ik / a_kk
      for j = k+1, ..., n
         a_ij = a_ij − ℓ_ik a_kj
      end
   end
end
```

S podobnim štetjem kot v GE se izkaže, da je cena računanja matrike L enaka

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}.$$

Zgornjetrikotni del matrike A, ki ostane, pa je en matriki U.

LU razcep matrike vedno ne obstaja

Problematični je npr. matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Numerično pa je problematična tudi npr. matrika

$$B = \begin{bmatrix} 10^{-10} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

saj računalnik 10^{-10} zaokroži na 0. Da pa se natančno povedati, kdaj razcep obstaja. Brez dokaza navedimo izrek o obstoju.

Izrek (Obstoj LU razcepa)

Za $n \times n$ matriko A sta naslednji trditvi ekvivalentni:

1. *LU razcep matrike A obstaja in je enoličen.*
2. *Leva vogalna podmatrika velikosti $k \times k$ matrike A je obrnljiva za vsak $k = 1, \ldots, n$.*

Reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa

1. Izračunamo $A = LU$. Cena: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.
2. Rešimo $Ly = b$ s premo subsitucijo. Cena: $n^2 - n$.
3. Rešimo $Ux = y$ z obratno subsitucijo. Cena: n^2.

Reševanje sistema $Ax = b$ prek LU razcepa

Primer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{L}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

Rešimo $Ly = b$ in dobimo $y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}^T$.
Rešimo $Ux = y$ in dobimo $x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

LU razcep z delnim pivotiranjem

Pri delnem pivotiranju pred eliminacijo v j-tem stolpcu primerjamo elemente

$$a_{jj}, a_{j+1,j}, \dots, a_{nj},$$

nato pa zamenjamo j-to vrstico s tisto, ki vsebuje element z največjo absolutno vrednostjo.

Menjava j-te in k-te vrstice pa je množenje z leve s permutacijsko matriko P_{jk}, ki se od identitete razlikuje le v j-ti in k-ti vrstici, ki sta zamenjani.

$A = [a_{ij}]_{i,j}$ `n × n matrika`

P `in` L `identicni` $n \times n$ `matriki`
for $k = 1, \dots, n-1$
  `poisci` q`-to vrstico, ki zadosca` $|a_{qj}| = \max_{j \leqslant p \leqslant n} |a_{pj}|$
  `zamenjaj` q`-to in` j`-to vrstico v matrikah` A, L, P
  for $i = k+1, \dots, n$
    $\ell_{ik} = a_{ik} / a_{kk}$
    for $j = k+1, \dots, n$
      $a_{ij} = a_{ij} - \ell_{ik} a_{kj}$

LU razcep z delnim pivotiranjem

Dodatno delo pri LU razcepu z delnim pivotiranjem je $\mathcal{O}(n^2)$ primerjanj in menjav. Torej je skupna cena še vedno

$$\boxed{\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)}.$$

Reševanje $Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem:

1. Izračunamo $PA = LU$. Cena: $\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$.
2. Rešimo $Ly = Pb$ s premo subsitucijo. Cena: $n^2 - n$.
3. Rešimo $Ux = y$ z obratno subsitucijo. Cena: n^2.

Izrek (Obstoj LU razcepa z delnim pivotiranjem)

Za $n \times n$ matriko A sta naslednji trditvi ekvivalentni:

1. *LU razcep matrike A z delnim pivotiranjem obstaja.*
2. *Matrika A je obrnljiva.*

$Ax = b$ prek LU razcepa z delnim pivotiranjem - primer

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 7 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -3 \\ -2 & -2 & -7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -5 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sim}_{2\leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -5 & \frac{11}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sim}_{3\leftrightarrow 4} \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Torej:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{58}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Za P dobimo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{1\leftrightarrow 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{2\leftrightarrow 3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{3\leftrightarrow 4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rešimo $Ly = Pb = \begin{pmatrix} -14 & 7 & -16 & 8 \end{pmatrix}^T$ in dobimo

$$y = \begin{pmatrix} -14 & 0 & -9 & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}^T.$$

Rešimo $Ux = y$ in dobimo

$$x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T.$$