Predavanje 2

Uvod v numerične metode in uvod v linearne sisteme

Drugi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

11. oktober 2021

Primer katastrofalnega odštevanja

Iščemo rešitve kvadratne enačbe

$$x^2 + 2ax + b = 0, \quad \text{kjer je } a > 0 \text{ in } a^2 > b.$$

Rešitev z manjšo absolutno vrednostjo je

$$x_2 = \frac{-2a + \sqrt{4a^2 - 4b}}{2} = -a + \sqrt{a^2 - b}.$$

1 $k_1 := a^2$
2 $k_2 := k_1 - b$
3 $k_3 := \sqrt{k_2}$
4 $k_4 := -a + k_3$

Če je a^2 veliko večji od b, potem ima lahko korak 4 veliko napako. Možna rešitev:

$$x_2 = (-a + \sqrt{a^2 - b}) \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{a + \sqrt{a^2 - b}} = \frac{-b}{a + \sqrt{a^2 - b}}.$$

$$
\begin{aligned}
k_1 &:= a^2 \\
k_2 &:= k_1 - b \\
k_3 &:= \sqrt{k_2} \\
k_4 &:= a + k_3 \\
k_5 &:= \frac{-b}{k_4}
\end{aligned}
$$

Primer (https://zalara.github.io/Primer_kvadratna_enacba.m)

```
>> a = 10000;
>> b = -1;
>> x = -a+sqrt(a^2 - b)
x = 5.000000055588316e-05

>> x^2 + 2 * a * x +b
ans = 1.361766321927860e-08

>> x = -b/(a+sqrt(a^2-b))
x = 4.999999987500000e-05

>> x^2 + 2 * a * x +b
ans = -1.110223024625157e-16
```

Računanje s stabilnejšo obliko

- Izračun vrednosti funkcije
$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$
ni stabilen za velike x, ker je $\sqrt{x+1} \approx \sqrt{x}$. Tej težavi se lahko izognemo:
$$f(x) = f(x) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$
`https://zalara.github.io/Naloga_3.m`

- Vrsto
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)},$$
ki se sešteje v $\frac{n}{n+1}$ (dokaz: indukcija), je bolje numerično računati vzvratno kot
$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2}.$$
`https://zalara.github.io/Naloga_5.m`

- Vrednost integrala $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, \mathrm{d}x$ se lahko rekurzivno (integracija per partes) izračuna kot

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}, \qquad I_0 = 1 - \frac{1}{e}.$$

Če iz formule izrazimo I_{n-1}, dobimo

$$I_{n-1} = \frac{1}{n} I_n + \frac{1}{ne}.$$

Izkaže se, da je druga formula boljša, pri čemer za začetni približek I_N (pri velikem N) lahko vzamemo kar koli. Zakaj?
`https://zalara.github.io/Naloga_6.m`

Drugo poglavje: Linearni sistemi

Linearni sistem m enačb z n neznankami $x_1, \ldots, x_n$ je oblike

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kjer so a_{ij}, b_j realna števila. V matrični obliki ga zapišemo kot

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}.$$

Geometrijski pomen sistema $Ax = b$

Naj bodo $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n)}$ stolpci matrike A, tj.,

$$a_{(i)} := \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Linearna kombinacija vektorjev $a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots, a_{(n)}$ je vsak vektor oblike

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

kjer so $x_i \in \mathbb{R}$ realna števila.

Zanima nas, ali obstaja linearna kombinacija (1), ki je enaka vektorju b.

Sistem $Ax = b$ z vidika numerične matematike

- Kako drago je reševanje sistema $Ax = b$?

  cena=število osnovnih računskih operacij $(+, -, \cdots, :)$.

- Kateri problemi in napake se pojavijo med reševanjem $Ax = b$?

  Ali obstajajo slabe matrike? Kako take matrike identificirati?

- Za katere matrike se da enostavno in poceni rešiti tak sistem?

Kratka ponovitev linearne algebre

Naj bo A kvadratna matrika (tj. $n \times n$ matrika). Inverz matrike A, označimo z A^{-1}, zadošča (če obstaja)

$$A^{-1} A = I \quad \text{in} \quad A A^{-1} = I$$

Formalna rešitev sistema $Ax = b$ je

$$x = A^{-1} b.$$

Toda numerično je slabo iskati x v tej obliki.

Zakaj?

- A^{-1} lahko ne obstaja. (natanko takrat, ko jedro matrike A ni trivialno)
- Računanje A^{-1} je lahko nestabilno. (če je kakšna lastna vrednost A zelo blizu 0)
- A^{-1} sploh ne bomo potrebovali.
- Reševanje prek izračuna A^{-1} je dražje.

Izrek

Inverz $n \times n$ matrike A ne obstaja (pravimo, da je singularna) natanko tedaj, ko velja ena od naslednjih trditev:

- *Stolpci A so linearno odvisni.*
- *Vrstice A so linearno odvisne.*
- $\mathrm{rank}(A) < n$
- $\det(A) = 0$
- *Rešitev sistema $Ax = b$ lahko ne obstaja.*
- *Če rešitev sistema $Ax = b$ obstaja, ni enolična.*

Posledica

Za rešitve sistema $Ax = b$ obstajajo tri možnosti:

1. *A obrnljiva: Obstaja enolična rešitev $x = A^{-1}b$.*
2. *A ni obrnljiva in $b \in \mathrm{slika}(A)$: Obstaja neskončno rešitev.*
3. *A ni obrnljiva in $b \notin \mathrm{slika}(A)$: Ni rešitev.*

Primer

1. *A je obrnljiva in rešitev je enolična:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}: \qquad x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. *A ni obrnljiva in rešitev je neskončno:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}: \qquad x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \alpha \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. *A ni obrnljiva in rešitev ne obstaja:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ponovitev Gaussove eliminacije

Cilj je pretvoriti sistem v zgornjetrikotnega, nato pa ga rešiti z obratno substitucijo.

Primer. Rešujemo $Ax = b$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 7 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Tvorimo razširjen sistem

$$\tilde{A} = [A \;\; b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & -6 & 7 & -7 \\ 3 & -4 & 4 & -6 \end{array}\right]$$

Prištejemo 2-kratnik prve vrstice drugi in 1-kratnik prve vrstice tretji.

$$\tilde{A}_{(1)} = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \end{array}\right]$$

Odštejemo 1-kratnik druge vrstice od tretje

$$\tilde{A}_{(2)} = \left[\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

Rešimo z obratno substitucijo

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{-2} = -1, \\ x_2 &= \frac{1}{-2}\left(-9 - 5x_3\right) = 2, \\ x_1 &= \frac{1}{-3}\left(-1 - 2x_2 + x_3\right) = 2. \end{aligned}$$