Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

13. junij 2022

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Premici p in q sta dani z enačbama

$$p : x - \frac{1}{2} = \frac{y}{2} = 1 - z \quad \text{ter} \quad q : \frac{x+2}{3} = y + 1 = \frac{z-1}{2}.$$

a) (5 točk) Ali se premici p in q sekata?

Iz enačb razberemo:

$\vec e_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A_p(\frac{1}{2}, 0, 1)$

$\vec e_q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_q(-2, -1, 1)$

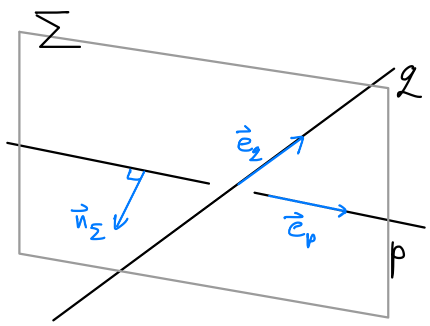
p in q se sekata, če $\vec r_{A_p} + t\vec e_p = \vec r_{A_q} + u\vec e_q$, tj.

$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ta sistem pa nima rešitev.

p in q se ne sekata.

5

b) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Σ, ki vsebuje premico p in je vzporedna premici q.



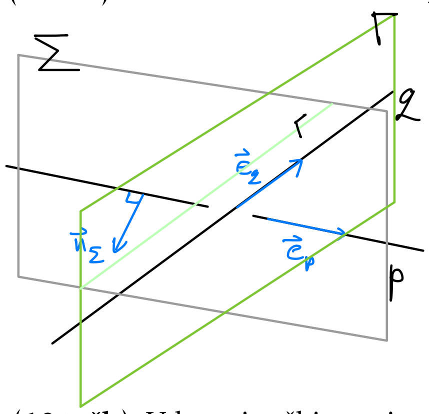
$\vec n_\Sigma \perp \vec e_p, \vec e_q$, tj. $\vec n_\Sigma \parallel \vec e_p \times \vec e_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Vzemimo $\vec n_\Sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, torej

$\Sigma: x - y - z = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\vec n_\Sigma \cdot \vec r_{A_p}}$.

5

c) (5 točk) Poišči enačbo ravnine Γ, ki vsebuje premico q in je pravokotna na ravnino Σ.



$\vec n_\Gamma \perp \vec n_\Sigma, \vec n_q$, tj. $\vec n_\Gamma \parallel \vec n_\Sigma \times \vec n_q = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Vzemimo $\vec n_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, torej:

$\Gamma: x + 5y - 4z = \underbrace{-11}_{\vec n_\Gamma \cdot \vec r_{A_q}}$.

5

d) (10 točk) V kateri točki ravnina Γ seka premico p? Določi razdaljo med premicama p in q.

5

Vstavimo parametrizacijo p v enačbo Γ:

$p: \vec r = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec r_{A_p}} + t\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec e_p} \ldots \quad t + \frac{1}{2} + 5 \cdot 2t - 4(1-t) = -11 \ldots \quad 15t = -\frac{15}{2} \ldots t = -\frac{1}{2}$,

torej $\vec r_T = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$, presečišče v $T(0, -1, \frac{3}{2})$.

5

Naj bo Σ_q ravnina vzporedna ravnini Σ, ki vsebuje q; $\Sigma_q: x - y - z = -2$.

$d(p,q) = d(p, \Sigma_q) = d(T, \Sigma_q) = \dfrac{|\vec n_\Sigma \cdot \vec r_T - d|}{\|\vec n_\Sigma\|} = \dfrac{|-1/2 + 2|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $A \in \mathbb{R}^4$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V $\mathbb{R}^4$ sta dani podmnožici

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x}^\mathsf{T} A\mathbf{x} = 0\} \text{ ter } V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

a) (10 točk) Naj bosta $\mathbf{u} = [0,0,1,1]^\mathsf{T}$ ter $\mathbf{v} = [1,-1,0,0]^\mathsf{T}$. Prepričaj se, da je $\mathbf{u} \in U$ ter $\mathbf{v} \in V$. Ali je vektor $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ vsebovan v U oziroma V?

5

Velja $\vec{u}^\mathsf{T} A \vec{u} = [0,0,1,1] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{= A\vec{u}} = 0$, torej $\vec{u} \in U$.

Podobno je $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$, torej $\vec{v} \in V$. (Poleg tega je $\vec{v}^\mathsf{T} A \vec{v} = \vec{v}^\mathsf{T} \vec{0} = 0$ in zato $\vec{v} \in U$.)

5

$A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = A\vec{u} \neq \vec{0}$, torej $\vec{u}+\vec{v} \notin V$.

$(\vec{u}+\vec{v})^\mathsf{T} A(\vec{u}+\vec{v}) = \underbrace{\vec{u}^\mathsf{T} A\vec{u}}_{=0} + \underbrace{\vec{u}^\mathsf{T} A\vec{v}}_{=0} + \underbrace{\vec{v}^\mathsf{T} A\vec{u}}_{=2} + \underbrace{\vec{v}^\mathsf{T} A\vec{v}}_{=0} = 2$, torej $\vec{u}+\vec{v} \notin U$.

b) (15 točk) Ali sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^4$? Za vsakega, ki je vektorski podprostor, poišči bazo in določi njegovo dimenzijo.

5 U ni vektorski podprostor v $\mathbb{R}^4$: Iz (a) vemo $\vec{u}, \vec{v} \in U$, vendar $\vec{u}+\vec{v} \notin U$.

5 $V = N(A)$, torej je V vektorski podprostor.

5

Iz $\underbrace{\dim(N(A))}_{=\dim(V)} + \underbrace{\text{rang}(A)}_{=1} = \underbrace{\dim(\mathbb{R}^4)}_{=4}$ sledi $\dim(V) = 3$.

Bazo dobimo iz $A\vec{x} = \vec{0}$ ... $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ ... $\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$,

zato $B_V = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. naloga (25 točk)

Podatke (x, y) iz tabele

x	-2	-1	1	2
y	-4	1	2	-1

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$.

a) (5 točk) Zapiši predoločen sistem enačb za parametra a in b.

$$\underbrace{\begin{aligned} f(-2) &= -4 \ \dots \ & 4a - \tfrac{1}{2}b &= -4 \\ f(-1) &= 1 \ \dots \ & a - b &= 1 \\ f(1) &= 2 \ \dots \ & a + b &= 2 \\ f(2) &= -1 \ \dots \ & 4a + \tfrac{1}{2}b &= -1 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{= \vec{x}} = \vec{b}.}_{5}$$

b) (20 točk) Določi parametra a in b po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

5 { Rešiti moramo pripadajoč normalni sistem $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$.

7 { $$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad A^T \vec{b} = \begin{bmatrix} -17 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

8 { $$\left[A^T A \mid A^T \vec{b}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 34 & 0 & -17 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \ \dots \ \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in}$$

$$f(x) = ax^2 + \frac{b}{x} = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}.$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo K matrika

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) (7 točk) Izračunaj karakteristični polinom matrike K in poišči vse njene lastne vrednosti.

5

$$\Delta_K(\lambda) = \det(K-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\underbrace{(\lambda^2-\lambda-2)}_{(\lambda+1)(\lambda-2)} = (1+\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

$\underbrace{\lambda_{1,2} = -1,\ \lambda_3 = 2 \quad \text{last. vred. } K}_{2}$

b) (3 točke) Prepričaj se, da je $\mathbf{v} = [1,1,1]^{\mathsf{T}}$ lastni vektor matrike K. Kateri lastni vrednosti pripada?

$$K\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{v},$$

tj. $\vec{v}$ je lastni vektor K za lastno vrednost $\lambda_3 = 2$. 2+1

c) (5 točk) Ali je $\{\mathbf{v}\}^{\perp}$ lastni podprostor matrike K? Zakaj? Če je, za katero lastno vrednost?

K je simetrična, torej so lastni vektorji za $\lambda_{1,2} = -1$ pravokotni na edini (do lin. neodvisnosti) l. vekt. $\vec{v}$ za l. vred. $\lambda_3 = 2$. 5

V $\{\vec{v}\}^{\perp}$ so torej vsi l. vektorji za l. vred $\lambda_{1,2} = -1$,

tj. $\{\vec{v}\}^{\perp}$ je lastni podprostor K za l. vrednost $\lambda_{1,2} = -1$.

d) (10 točk) Poišči ortonormirano bazo za $\mathbb{R}^3$ sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike K.

7

Poiščimo najprej l. vektorje za l. vred. $\lambda_{1,2} = -1$, le-ti so pravokotni na $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\vec{v}\cdot\vec{x} = 0 \ \dots \ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \ \dots \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \dots \ \vec{x} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Izberimo npr.: $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($x_2 = 1,\ x_3 = -1$) ter $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($x_2 = 1,\ x_3 = 1$), ta dva sta (že) pravokotna.

3

ON za $\mathbb{R}^3$ iz l. vekt. K je torej: $B = \left\{ \frac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1, \frac{1}{\|\vec{x}_2\|}\vec{x}_2, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$