Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: 3. popravni kolokvij

5. september 2019

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Dani sta ravnina Σ in premica p:

$$\Sigma : 2x - y + z = 3\ ,\ \ p : \frac{x-2}{3} = -y = \frac{z+1}{2}.$$

(a) (5) Poišči koordinate točke T, v kateri premica p seka ravnino Σ.

(b) (10) Poišči parametrizacijo premice q, ki leži v ravnini Σ in seka premico p pod pravim kotom.

(c) (10) Poišči enačbo ravnine Λ, ki vsebuje premico p in seka ravnino Σ pod pravim kotom.

Rešitev:

(a) Premica p ima smerni vektor $\vec{p} = [3, -1, 2]^T$ in vsebuje točko $A(2, 0, -1)$, zato lahko točke na premici p lahko zapišemo kot

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3t \\ -t \\ -1+2t \end{bmatrix}.$$

Iskano presečišče T mora ležati na p, zato bo take oblike, hkrati pa mora zadoščati enačbi ravnine, zato velja

$$\begin{aligned} 2(2+3t) - (-t) + (-1+2t) &= 3, \\ 4 + 6t + t - 1 + 2t &= 3, \\ 9t &= 0, \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Ko $t = 0$ vstavimo v parametrizacijo premice p, dobimo $T(2, 0, -1)$.

(b) Ker premica q leži v ravnini Σ, bo njen smerni vektor $\vec{q}$ pravokoten na normalo ravnine $\vec{n} = [2, -1, 1]^T$. Ker premica q seka premico p pod pravim kotom, bo $\vec{q}$ pravokoten na $\vec{p}$. To pomeni, da bo $\vec{q}$ vzporeden vektorskemu produktu $\vec{n} \times \vec{p} = [-1, -1, 1]^T$. Izberimo $\vec{q} = [1, 1, -1]^T$. Na premici q gotovo leži točka $T(2, 0, -1)$, ki smo jo izračunali pri (a). Enačba premice q je torej

$$q\colon \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Naj bo $\vec{m}$ normalni vektor ravnine Λ. Ker Λ vsebuje premico p, je $\vec{m}$ pravokoten na $\vec{p}$. Ker Λ seka Σ pod pravim kotom, je $\vec{m}$ pravokoten na $\vec{n}$. Vektorje s to lastnostjo pa smo že izračunali pod (b). Vzemimo torej $\vec{m} = [1, 1, -1]^T$. Za točko na Λ lahko vzamemo katerokoli točko na premici p, na primer kar $T(2, 0, -1)$. Ker je $\vec{r}_T \cdot \vec{m} = 3$, je enačba ravnine Λ enaka

$$\Lambda\colon x + y - z = 3.$$

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\vec{e} = [1,1]^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $W \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ podmnožica vseh matrik $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, za katere velja

$$X\vec{e} = X^\mathsf{T}\vec{e}.$$

(a) (5) Ali je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ vsebovana v W? Ali je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ vsebovana v W?

(b) (10) Preveri, da je W vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) (10) Določi dimenzijo W in poišči bazo za W. Izrazi tiste od matrik iz (a), ki so vsebovane v W, v tej bazi.

Rešitev:

(a) Izračunamo

$$A\vec{e} = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array}\right] \quad \text{ter} \quad A^T\vec{e} = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right].$$

Ker sta $A\vec{e}$ in $A^T\vec{e}$ različna, sklepamo, da $A \notin W$. Ker je matrika B simetrična, tj. $B = B^T$, bo seveda $B\vec{e} = B^T\vec{e}$ in $B \in W$.

(b) Predpostavimo, da sta $X, Y \in W$. Potem velja $X\vec{e} = X^T\vec{e}$ in $Y\vec{e} = Y^T\vec{e}$. Izračunamo

$$(X+Y)\vec{e} = X\vec{e} + Y\vec{e} = X^T\vec{e} + y^T\vec{e} = (X^T + Y^T)\vec{e} = (X+Y)^T\vec{e}.$$

Ker je $(X+Y)\vec{e} = (X+Y)^T\vec{e}$, je $X + Y \in W$.
Naj bo še $\alpha \in \mathbb{R}$. Izračunamo

$$(\alpha X)\vec{e} = \alpha(X\vec{e}) = \alpha(X^T\vec{e}) = (\alpha X^T)\vec{e} = (\alpha X)^T\vec{e}.$$

Ker je $(\alpha X)\vec{e} = (\alpha X)^T\vec{e}$, je $\alpha X \in W$. Ker je W zaprt za seštevanje in množenje s skalarjem, je vektorski podprostor.

(c) Zapišimo matriko $X \in W$ po komponentah:

$$X = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right].$$

Izračunamo

$$X\vec{e} = \left[\begin{array}{c} a+b \\ c+d \end{array}\right] \quad \text{ter} \quad X^T\vec{e} = \left[\begin{array}{c} a+c \\ b+d \end{array}\right],$$

torej bo $X\vec{e} = X^T\vec{e}$ natanko tedaj, ko bo veljalo

$$\begin{aligned} a+b &= a+c, \\ c+d &= b+d. \end{aligned}$$

Pogoja se poenostavita v $b = c$. V W bodo torej natanko tiste matrike X, ki so oblike

$$X = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array}\right].$$

Vidimo, da imamo 3 parametre, zato bo dimenzija prostora W enaka 3. Bazo najlažje dobimo tako, da enega od parametrov postavimo na 1, ostala dva pa na 0. Baza za W so torej matrike

$$X_1 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right], \quad X_2 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{in} \quad X_3 = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

V tej bazi lahko matriko B zapišemo kot

$$B = X_1 + 2X_2 - X3.$$

3. naloga (25 točk)

Podatke (x, y) iz tabele

$$\begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline y & -4 & 1 & 2 & -1 \end{array}.$$

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$.

(a) (10) Zapiši predoločen sistem enačb za parametra a in b.

(b) (15) Določi parametra a in b po linearni metodi najmanjših kvadratov, da bo f predstavljala najboljšo aproksimacijo za zgornje podatke.

Rešitev:

(a) Dobimo sistem

$$\begin{aligned} 4a - \frac{b}{2} &= -4, \\ a - b &= 1, \\ a + b &= 2, \\ 4a + \frac{b}{2} &= -1, \end{aligned}$$

oziroma $A\vec{x} = \vec{d}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Izračunamo

$$A^T A = \begin{bmatrix} 34 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T\vec{d} = \begin{bmatrix} -17 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Sistem $A^T A\vec{x} = A^T\vec{d}$ ima očitno rešitev $a = -\frac{17}{34} = -\frac{1}{2}$ in $b = 1$.

4. naloga (25 točk)

Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (15) Poišči vse lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

(b) (10) Je matrika A podobna diagonalni matriki? Če je, zapiši pripadajočo diagonalno matriko D in prehodno matriko D.

Rešitev:

(a) Najprej izračunamo karakteristični polinom:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-x & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} &= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \\
&= (1-x) \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1+x-x^2 & 0 & 1-x \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = \\
&= -(1-x) \begin{vmatrix} 1+x-x^2 & 1-x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = \\
&= -(1-x)^2 \begin{vmatrix} 1+x-x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= -(1-x)^2(1+x-x^2-1) = \\
&= -(1-x)^2(x-x^2) = \\
&= -(1-x)^2 \cdot (1-x) \cdot x = \\
&= -(1-x)^3 \cdot x = \\
&= x(x-1)^3.
\end{aligned}$$

Ničle so torej $x_{1,2,3} = 1$ in $x_4 = 0$. Pri lastni vrednosti 1 dobimo

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej so lastni vektorji oblike $[0, y, w, w]^T$. Pri $y = 1$ in $w = 0$ dobimo $\vec{v}_1 = [0, 1, 0, 0]^T$, pri $y = 0$ in $w = 1$ pa $\vec{v}_2 = [0, 0, 1, 1]^T$. Pri $x_{1,2,3} = 1$ imamo torej dva linearno neodvisna lastna vektorja, $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$.

Pri lastni vrednosti 0 dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

torej so v ničelnem prostoru vektorji oblike $[w, -3w, 2w, w]^T$. Pri $w = 1$ dobimo $\vec{v}_4 = [1, -3, 2, 1]^T$.

(b) Ker imamo pri lastni vrednosti $x_{1,2,3} = 1$ le dva linearno neodvisna lastna vektorja, matrika A ni diagonalizabilna.