1. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 18. 4. 2018)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Dovoljena je uporaba enega A4 lista s formulami. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dani sta premici

$$p\colon \frac{5-x}{3} = \frac{y-1}{2} = 9-z \ \text{ in } \ q\colon x-1 = -\frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

(a) Poišči ravnino Σ, ki je vzporedna premici p in vsebuje premico q.

(b) Določi pravokotno projekcijo točke $A(5,1,9)$ na ravnino Σ.

(c) Zapiši enačbo pravokotne projekcije premice p na ravnino Σ.

Rešitev :

(a) Normala na ravnino Σ mora biti pravokotna na obe premici p in q. Lahko jo torej izračunamo kot vektorski produkt vektorjev na premici $\mathbf{p} = [-3,2,-1]^\mathsf{T}$ in $\mathbf{q} = [1,-2,2]^\mathsf{T}$:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = [2,5,4]^\mathsf{T}$$

Za točko na ravnini lahko vzamemo katerokoli točko na premici q, na primer $Q(1,0,1)$. Tako dobimo enačbo za Σ

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_Q \quad \text{oz.} \quad 2x + 5y + 4z = 6$$

(b) Vzamemo lahko vektor med katerokoli točko na ravnini (npr. $Q(1,0,1)$) in A in ga projiciramo na normalo. Označimo tak vektor z **a**:

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_A = [4,1,8]^\mathsf{T}$$

Projekcijo vektorja **a** na **n** označimo z **b** in ga izračunamo po formuli

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}}\,\mathbf{n} = \frac{45}{45}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}$$

Če od krajevnega vektorja $\mathbf{r}_A$ odštejemo projekcijo **b** pristanemo ravno na ravnini Σ (nariši si sliko). Projekcija točke A na ravnino Σ je torej $A'(3,-4,5)$.

(c) Dovolj je projicirati katerokoli točko s premice p na ravnino Σ in uporabiti vektor **p** kot vektor vzdolž iskane premice. Tako projekcijo točke s premice p na Σ smo dobili v prejšnji točki in lahko takoj zapišimo parametrično obliko iskane premice:

$$\mathbf{r}(t) = [3,-4,5]^\mathsf{T} + t[-3,2,-1]\mathsf{T}$$

2. Podan je sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ x & + & 2y & - & z & = & 5 \\ x & - & y & + & az & = & -1 \end{array}$$

   (a) Kako sta rešljivost in število rešitev odvisni od parametra $a \in \mathbb{R}$?

   (b) V odvisnosti od a zapiši rešitve danega sistema.

   Rešitev : Izvedemo Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & a & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{array}\right]$$

   (a) V primeru $a = 2$ ima sistem neskončno rešitev, sicer pa točno eno.

   (b) Če je $a = 2$, je vsaka rešitev oblike $\mathbf{x} = [1, 2, 0]^\mathsf{T} + t[-1, 1, 1]^\mathsf{T}$ za nek $t \in \mathbb{R}$. Za ostale vrednosti a pa dobimo edino rešitev $\mathbf{x} = [1, 2, 0]^\mathsf{T}$.

3. Naj bosta A in B matriki

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \\ -7 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -6 & 0 & -6 \\ -9 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Reši matrično enačbo $A(X - I) = BX$.

   Rešitev: Enačbo preuredimo v obliko

$$(A - B)X = A$$

   Najlažje jo rešimo z Gaussovo eliminacijo na razširjeni matriki

$$[A - B|A] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 8 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & -7 & 4 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I|X]$$

4. Podana je matrika

$$A_n = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunaj $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ in $\det(A_4)$.

(b) Poišči rekurzivno zvezo, ki izraža $\det(A_n)$.

(c*) S pomočjo matematične indukcije pokaži, da je

$$\det(A_n) = \frac{1}{3}(4^{n+1} - 1)$$

za vsa naravna števila $n \geq 2$.

Rešitev :

(a) $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$

$\det(A_3) = 5\det(A_2) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 85$

$\det(A_4) = 5\det(A_3) - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\det(A_3) - 4\det(A_2) = 341$

(b) Podobno kot pri izračunu $\det(A_4)$ opazimo, da velja

$$\det(A_n) = 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2})$$

(c) Formula očitno velja za $n = 2$ in $n = 3$ (pa tudi že za $n = 1$). Za dokaz indukcijskega koraka lahko uporabimo rekurzivno zvezo

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= 5\det(A_{n-1}) - 4\det(A_{n-2}) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{3}(4^n - 1) - 4 \cdot \frac{1}{3}(4^{n-1} - 1) \\ &= \frac{1}{3}\left(5 \cdot 4^n - 5 - 4^n + 4\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(4^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

kjer pri 2. enakosti uporabimo indukcijsko predpostavko.