1. kolokvij iz Linearne algebre
(Ljubljana, 22. 4. 2011)

Čas reševanja je 90 minut. Naloge so enakovredne. Rezultati bodo objavljeni na strani `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Premica p ima smerni vektor $\mathbf{s} = [1, 2, -1]^\mathsf{T}$ in gre skozi točko $A(0, 1, 3)$.

   (a) Zapiši parametrizacijo in enačbo premice p.

   (b) Naj bo Σ ravnina, ki vsebuje premico p in točko $T(1, 0, -1)$. Poišči še enačbo te ravnine!

REŠITEV:

(a) Parametrizacija premice je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + t\mathbf{s}$, torej

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Enačbo dobimo tako, da iz $x = t$, $y = 1 + 2t$ in $z = 3 - t$ vsakič izrazimo t in dobljene izraze enačimo:

$$x = \frac{y - 1}{2} = 3 - z.$$

(b) Ker Σ vsebuje p in T, je njen normalni vektor $\mathbf{n}$ pravokoten na $\mathbf{s}$ in $\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_A$. Vektorski produkt je vedno pravokoten na dva dana vektorja, zato vzamemo

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Katerikoli vektor vzporeden temu je primeren normalni vektor za Σ, izberemo $\mathbf{n} = [3, -1, 1]^\mathsf{T}$. Enačba ravnine je potem

$$3x - y + z = 2 (= \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_T).$$

2. Za sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -3 \\
-x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & + & 7x_5 & = & -3 \\
3x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & + & 3x_5 & = & 7
\end{array}$$

   (a) Zapiši razširjeno matriko sistema in izvedi na njej Gaussovo eliminacijo. Obkroži pivote.

(b) Izvedi obratno vstavljanje – znebi se neničelnih elementov nad pivoti, da dobiš matriko sistema v reducirani vrstični stopničasti obliki.

(c) Poišči splošno in kakšno posebno rešitev danega sistema. Za posebno rešitev naredi preizkus.

(d) Poišči bazo ničelnega prostora matrike zgornjega sistema.

REŠITEV:

(a)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 7 & -3 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 16 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(b)

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 2 & 0 & -3 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(c) Naj bo $x_2 = s$, $x_4 = t$. Potem $x_5 = 7$, $x_3 = -16 - t$, $x_1 = 22 + 3t - 2s$. Splošna rešitev je $\{[22 + 3t - 2s, s, -16 - t, t, 5]^{\mathsf{T}}, s, t \in \mathbb{R}\}$. Primer posebne rešitve je $[22, 0, -16, 0, 5]$.

(d) Bazo prostora $N(A)$ tvorita vektorja $v_1 = [-2, 1, 0, 0, 0]^T$ in $v_2 = [3, 0, -1, 1, 0]^T$.

3. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ p & 0 & p \end{bmatrix},$$

kjer je p poljubno realno število.

(a) Za $p = -1$ poišči A^2 in A^{-1}.

(b) Za katere p *ne* obstaja inverz zgornje matrike?

REŠITEV:

(a) Za $p = -1$ je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{zato} \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverz poiščemo z Gaussovo eliminacijo $[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}]$. Dobimo:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Dva koraka Gaussove eliminacije naredimo na matriki A s parametrom p:

$$\begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ p & 0 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -p^2 & p \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & p & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & p + 2p^2 \end{bmatrix}.$$

Matrika nima inverza, če je kakšen od pivotov enak 0. Le zadnji pivot je lahko ničeln, enačbo $p + 2p^2 = 0$ pa rešita $p = 0$ in $p = -\frac{1}{2}$.

4. Dani so vektorji

$$v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči dimenzijo in bazo linearne ogrinjače vektorjev v_1, v_2, v_3, v_4.

(b) Izberi enega izmed vektorjev v_1, v_2, v_3, v_4 in ga izrazi kot linearno kombinacijo ostalih vektorjev.

(c) Ali je izrazitev iz prejšnje točke enolična?

REŠITEV:

(a)

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 & 14 \\ 5 & 4 & 9 & -2 \\ 11 & 9 & 19 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & -2 \\ 7 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker sta pivota dobljene matrike v prvem in drugem stolpcu, bazo prostora $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tvorita vektorja v_1 in v_2.

(b)

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej $v_3 = 5v_1 - 4v_2$ in $v_4 = -6v_1 + 7v_2$.

(c) Izrazitev v_4 preko v_1, v_2 in v_3 ni enolična, saj vektorji v_1, v_2 in v_3 niso linearno neodvisni. Iz zadnje matrike dobimo

$$v_4 = (-6 - 5t)v_1 + (7 + 4t)v_2 + tv_3$$

za poljubno realno število t. Če vzamemo npr. $t = 1$, dobimo $v_4 = -11v_1 + 11v_2 + v_3$.