TEORETIČNI DEL

1. (10 točk) Za vsakega od naslednjih pogojev zapišite primer različnih neničelnih vektorjev $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, za katera je posamezni pogoj izpolnjen.

   A. $\{\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{x} \times \vec{y}\}$ je ortonormirana baza $\mathbb{R}^3$.

   Denimo:
   $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   Pogoj: vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ morata biti pravokotna, vsak dolžine 1.

   B. Mešani produkt vektorjev $\vec{x}$, $\vec{y}$ in $\vec{x} \times \vec{y}$ je enak 0.

   Denimo:
   $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   Pogoj: vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ morata biti kolinearna, ne enaka.

   C. Rang matrike z vrsticama $\vec{x}^\mathsf{T}$ in $\vec{y}^\mathsf{T}$ je enak 1.

   Denimo:
   $$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
   Pogoj: vektorja $\vec{x}$ in $\vec{y}$ morata biti kolinearna, ne enaka.

   (Točkovanje: Še enkrat, vektorji morajo biti različni in neničelni. Vsak pravilni odgovor 3.3 točke, vsi trije pravilni 10 točk.)

2. (5 točk) Naj bodo $S_1, S_2, \ldots, S_6$ linearno neodvisne simetrične 3×3 matrike. Pokažite, da tvorijo bazo vektorskega prostora simetričnih 3×3 matrik.

   Vse 3×3 simetrične matrike tvorijo vektorski prostor dimenzije 6. To se lahko denimo prepričate tako, da napišete
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = \mathcal{L}\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}, \}.$$
   Zato je vsaka linearno neodvisna množica poljubnih šestih linearno neodvisnih matrik tudi baza omenjenega prostora.
   (Točkovanje: 2.5 točke, če ste napisali, da je dimenzija vektorskega prostora simetričnih 3×3 matrik enaka 6. Najpogostejša napaka, ki ste jo naredili, je, da ste za $\{S_1, \ldots, S_6\}$ izbrali $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, E_{23} + E_{32}\}$ in za njih pokazali, da so baza vektorskega prostora simetričnih 3×3 matrik.)

3. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika ranga n. Za vsako od naslednjih trditev obkrožite ali drži ali ne drži. Svoj odgovor dobro utemeljite.

   A. (5 točk) Če je QR razcep matrike A enak $A = QR$, potem je $A^T A = R^T R$.

   DRŽI   NE DRŽI

   Če je $A = QR$, kjer je Q ortogonalna matrika (t.j. $Q^T Q = I$) in R zgornje trikotna, potem je
   $$A^T A = (QR)^T (QR) = R^T Q^T Q R = R^T R.$$
   (Točkovanje: 5 točk za dokaz, 0 sicer.)

B. (5 točk) Če je $\vec{x} = \vec{x_0}$ najboljši približek rešitve po linearni metodi najmanjših kvadratov linearnega sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, potem je $A\vec{x_0} - \vec{b} \in C(A)$.

DRŽI $\boxed{\text{NE DRŽI}}$

Primeri dobrih rešitev:

(a) V primeru, ko sistem $A\vec{x} = \vec{b}$ nima rešitve, velja $b \notin C(A)$. Ker je $C(A)$ vektorski prostor, tako ne more veljati $A\vec{x_0} - \vec{b} \in C(A)$.

(b) Če je $\vec{x} = \vec{x_0}$ najboljši približek rešitve po linearni metodi najmanjših kvadratov linearnega sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, potem je rešitev normalnega sistema $A^T A\vec{x_0} = A^T\vec{b}$ in zato $A\vec{x_0} - \vec{b} \in N(A^T) = C(A)^\perp$. Če je torej vektor $A\vec{x_0} - \vec{b}$ neničeln, ne more biti v $C(A)$.

(c) Lahko tudi napišete protiprimer. Denimo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. V tem primeru je $C(A) = \mathcal{L}\{\vec{i}\} = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$. Ker je $A\vec{x_0} \in C(A)$, je vektor $A\vec{x_0} - \vec{b}$ oblike $\begin{bmatrix} t \\ -1 \end{bmatrix} \notin C(A)$.

(Točkovanje: 5 točk za dokaz, 0 sicer.)

4. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takšna matrika, da velja $\dim N(A) = \dim N(A^T)$. Pokažite, da velja $m = n$.

Primera dobrih rešitev:

(a) Velja

$$\dim N(A) = n - \dim C(A) = n - \operatorname{rang}(A) \text{ in}$$
$$\dim N(A^T) = m - \dim C(A^T) = m - \operatorname{rang}(A^T) = m - \operatorname{rang}(A)$$

Iz predpostavke $\dim N(A) = \dim N(A^T)$ torej sledi $n - \operatorname{rang}(A) = m - \operatorname{rang}(A)$, torej $m = n$.

(b) Velja

$$\begin{aligned} \dim N(A) &= \dim N(A^T) = \dim C(A)^\perp = \\ &= m - \dim C(A) = \\ &= m - (n - \dim N(A)) = (m-n) + \dim N(A), \end{aligned} \tag{1}$$

iz česar sledi $m = n$. V (1) je prva enakost predpostavka naloge, druga enakost $N(A^T) = C(A)^\perp$ izrek s predavanj, v tretji enakosti uporabimo, da $C(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ in zato $\dim C(A)^\perp = m - \dim C(A)$, v četrti enakosti pa, da je $\dim N(A) + \dim C(A) = n$.

(Točkovanje: 5 točk za dokaz, 0 sicer.)

5. (5 točk) Pokažite, da če je matrika A podobna matriki B, potem je matrika A^4 podobna matriki B^4.

Če obstaja takšna obrnljiva matrika P, da je $A = PBP^{-1}$, potem je $A^4 = (PBP^{-1})^4 = PB^4P^{-1}$ in zato sta si tudi A^4 in B^4 podobni.
(Točkovanje: 5 točk za dokaz, 0 sicer.
Dokaz z lastnimi vrednostmi ni pravilen, saj obstajajo matrike, ki imajo iste lastne vrednosti, pa si niso podobne. Prav tako matriki A in B nista nujno diagonalizabilni in ni res, da je $A = PDP^{-1}$ in $B = PDP^{-1}$. Dokaz, v katerem piše le $A = PBP^{-1}, A^4 = PB^4P^{-1}$, je neutemeljen.)

6. (5 točk) Naj bo $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi $1, 2, 3, 4, 5$ in z lastnim vektorjem $\vec{x}$, ki pripada lastni vrednosti 5. Naj bo $B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ matrika z lastnimi vrednostmi $-1, -2, -3, -4, -5$ in z lastnim vektorjem $\vec{x}$, ki pripada lastni vrednosti -1. Pokažite, da je $\vec{x}$ tudi lastni vektor matrike $A^{-1}B$. Kateri lastni vrednosti pripada?

Velja $A\vec{x} = 5\vec{x}$ in $B\vec{x} = -\vec{x}$. Zatorej

$$A^{-1}B\vec{x} = A^{-1}(-\vec{x}) = -A^{-1}\vec{x} = -\frac{1}{5}\vec{x},$$

iz česar sledi, da je $\vec{x}$ lastni vektor matrike $A^{-1}B$ pri lastni vrednosti $-\frac{1}{5}$.
(Točkovanje: Tu pazite, v splošnem lastne vrednosti produkta matrik niso produkti lastnih vrednosti. Prav tako matriki A in B nista diagonalni matriki. 5 točk za dokaz, 0 sicer.)

7. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simetrična matrika z dvojno lastno vrednostjo -1 in njej pripadajočima lastnima vektorjema $\vec{v} = \begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$ ter $\vec{u} = \begin{bmatrix}1, & 1, & 0\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

   A. (5 točk) Izračunajte $A^{2020}\,\vec{v}$.

   $A^{2020}\vec{v} = (-1)^{2020}\vec{v} = \vec{v} = \begin{bmatrix}0, & 1, & 1\end{bmatrix}^\mathsf{T}$.
   (Točkovanje: 5 točk za dokaz, 0 sicer.)

   B. (5 točk) Ali lahko kaj poveste o lastni vrednosti $\lambda_3 \neq -1$ matrike A? Ali lahko kaj poveste o lastnem vektorju, ki pripada λ_3?

   Ker je A simetrična matrika, je λ_3 realno število različno od -1. Lastni vektor $\vec{w}$, ki pripada λ_3, je pravokoten tako na $\vec{v}$ kot na $\vec{u}$, torej je kolinearen z vektorjem (ali pa enak vektorju)

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}.$$

   (Točkovanje: 2.5 točke za lastnosti lastne vrednosti in 2.5 točke za lastnosti lastnega vektorja.)