Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

Naloge	1 – 6	7 – 10	11 – 14	Skupaj	Odstotek
Možne točke:	24	24	16	64	100
Dosežene točke:					

3. IZPIT IZ LINEARNE ALGEBRE 2017/18

7. september 2018

Splošni napotki:

- ☐ Izpit vsebuje 14 nalog in obsega 4 strani. Čas za reševanje je 45 minut.
- ☐ Vsako prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona, slušalk in drugih pripomočkov se bo sankcioniralo z odvzemom izpita.

Za vsako od trditev 1 – 6 obkrožite ali drži ali ne drži.
Če drži, utemeljite, zakaj. Če ne drži, zapišite protiprimer.

1. Skalarni produkt poljubnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$, ki oklepata kot $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, je negativno število.

   DRŽI NE DRŽI

2. Če je U linearna lupina vektorjev $v_1, v_2, \ldots, v_k$, potem vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tvorijo bazo prostora U.

   DRŽI NE DRŽI

3. Če je simetrična matrika obrnljiva, potem je tudi njen inverz simetrična matrika.

DRŽI NE DRŽI

4. Če sta $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, potem je $\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A^2) - \det(B^2)$

DRŽI NE DRŽI

5. Če sta kvadratni matriki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obrnljivi in velja $(AB)^2 = A^2B^2$, potem velja $AB = BA$.

DRŽI NE DRŽI

6. Če za matriki $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja $\dim N(A) \leq \dim N(B)$, potem je $\dim C(A) \geq \dim C(B)$.

DRŽI NE DRŽI

Pri vsakem od vprašanj 7 – 10 za vsako od trditev v pripadajoči kvadratek ☐ jasno označite, če je trditev pravilna ☑ oziroma napačna ☒.

Za vsak pravilen odgovor boste prejeli 2 točki, za vsak napačen pa -1 točko. Če pustite kvadratek prazen, dobite 0 točk.

7. Katere od naslednjih trditev so pravilne za poljubne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$?

- ☐ $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$
- ☐ Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, potem je $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
- ☐ Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, potem je $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$.
- ☐ Če sta $\vec{b}$ in $\vec{c}$ kolinearna vektorja, potem je $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.
- ☐ Dolžina vektorja $\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})$ je enaka ploščini paralelograma, napetega na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

8. Katere od naslednjih trditev so resnične za kvadratno matriko $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?

- ☐ $\det(A) = \det(A^T)$
- ☐ $\det(A^m) = \det(A)^m$
- ☐ $\dim C(A) = \dim N(A)$
- ☐ Lastne vrednosti A so realne.
- ☐ Lastne vrednosti A in A^T so enake.
- ☐ Če je $A^2 = I$, potem je $A = I$.
- ☐ Če je 0 lastna vrednost matrike A, potem je A obrnljiva.
- ☐ Število njenih linearno neodvisnih vrstic je enako številu njenih linearno neodvisnih stolpcev.

9. Katere od naslednjih trditev so vedno resnične?

- ☐ Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n realnih lastnih vrednosti.
- ☐ Vsaka simetrična $n \times n$ matrika ima n različnih lastnih vrednosti.
- ☐ Vsaka simetrična matrika je obrnljiva.
- ☐ Če je P matrika, katere stolpci so paroma ortogonalni, velja $P^{-1} = P^T$.
- ☐ Lastni vektorji $n \times n$ simetrične matrike z večkratnimi lastnimi vrednostmi ne tvorijo baze $\mathbb{R}^n$.

10. Katere od naslednjih množic so vektorski podprostori v $\mathbb{R}^{n \times n}$?

- ☐ Vse matrike A, za katere velja $A = A^T$.
- ☐ Vse matrike B, za katere velja $B = -B^T$.
- ☐ Vse matrike C, za katere velja $\operatorname{rang}(C) = n$.
- ☐ Vse matrike, katerih elementi so nenegativna realna števila.
- ☐ Vse matrike, katerih vse vrstice so med seboj enake.
- ☐ Vse matrike X, katerih produkt z vnaprej dano matriko C je enak ničelni matriki.

Odgovorite na vsako od vprašanj 11 – 14 in odgovor utemeljite.

11. Kaj mora veljati za pravokotna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v $\mathbb{R}^3$, da bosta tudi vektorja $4\vec{a}+\vec{b}$ in $\vec{a}-\vec{b}$ pravokotna?

12. Za linearno preslikavo $\tau\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ naj velja $\tau(a) = b$, $\tau(b) = c$ ter $\tau(c) = b + c$ za neke vektorje $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Določite $\tau(a + 3b - 3c)$.

12. ____________

13. Naj ima 4×4 matrika A enojno lastno vrednost 2, dvojno lastno vrednost 1 ter determinanto enako 6. Določite njen karakteristični polinom.

13. ____________

14. Naj bo A matrika velikosti $n \times n$, ki ima pri lastni vrednosti 2 lastni vektor $x = [1,\ 3,\ -1]^T$ in pri lastni vrednosti -1 lastni vektor $y = [2,\ 0,\ -2]^T$. Izračunajte $A^2(x + y)$.

14. ____________