

1. IZPIT, LINEARNA ALGEBRA, TEORETIČNI DEL

3. junij 2022

(Na teoretičnem delu je 9 nalog, ki so skupaj vredne 100 točk.)

1. (10 točk) Naj bodo $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ in označimo s \cdot skalarni produkt vektorjev. Ali velja enakost

$$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w})?$$

Če da, dokažite enakost. Če ne, poiščite protiprimer.

2. (10 točk) Naj bo $U = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top\right\}$ vektorski podprostor v \mathbb{R}^3 .

A. Napišite primer enotskega vektorja iz U . B. Zapišite enačbo, ki določa U^\perp .

3. (10 točk) Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Ali je množica

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{x} + \vec{x} = B\vec{x}\}$$

vektorski podprostor v \mathbb{R}^3 ?

4. (10 točk) Pokažite, da za kvadratno matriko A velja $\dim N(A) = \dim N(A^T)$.

5. (10 točk) Ali za matriko $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ obstajata takšni realni števili α in β , da velja

$$\det(2AA^T A) = \alpha(\det A)^\beta?$$

Če da, ju določite. Če ne, utemeljite, zakaj ne.

6. (20 točk) Naj za $n \times n$ matriko Q velja $Q^T Q = I$.

A. Določite vse možne vrednosti determinante matrike Q .

B. Določite vse možne vrednosti ranga matrike Q .

7. (10 točk) Naj za matriko $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ velja

$$A\vec{i} = \vec{j}, A\vec{j} = -\vec{i} \text{ in } A\vec{k} = 2\vec{k}.$$

Zapišite vse lastne vrednosti matrike A^2 .

8. (10 točk) Naj bo A 5×5 matrika z dvema različnima lastnima vrednostima 2 in 4. Naj bo dimenzija lastnega podprostora pri lastni vrednosti 2 enaka 3. Zapišite vse možnosti karakterističnega polinoma matrike A .

9. (10 točk) Naj bo $n \times n$ obrnljiva matrika A diagonalizabilna. Pokažite, da je tudi A^{-1} diagonalizabilna.