

Digitalna vezja, BVS-RI

Mira TREBAR

P5 – Dvojiško računanje

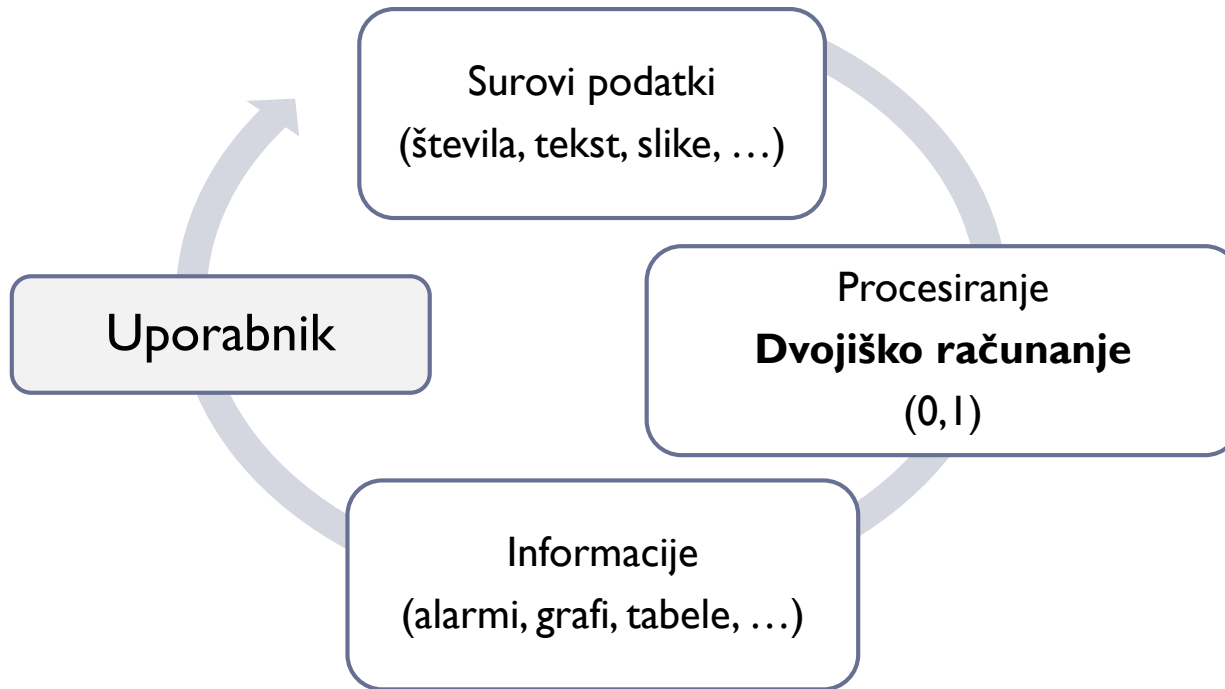
Vsebina

- ❑ Dvojiško računanje
 - Seštevanje števil
 - Odštevanje števil
- ❑ Predstavitev dvojiških števil
 - Nepredznačena števila
 - Predznačena števila
- ❑ Funkciji XOR in XNOR
- ❑ Seštevalniki

- ❑ Vir:
 - Widmer N.S., Moss G.L., Tocci R.J, Digital Systems Principles in Applications, Pearson Education, 2007 (P4, P6) ali 2018 (P6)
 - Trebar, Osnove logičnih vezij (P6 in P7, str. 63-98)
 - Video:
https://www.youtube.com/watch?v=_LEeDTXJWT8

1. Dvojiško računanje

Uporabnik → Surovi podatki → Procesiranje (dvojiško računanje) → Informacija



Procesiranje → CPE (mikroprocesorji, mikrokontrolerji, računalniki, ...)

1.1 Seštevanje

- Seštevanje x_0 in y_0 (bit 0 pri seštevanju)
(rezultat = vsota z_0 in prenos na višje mesto c_0)

$$0+0 = 0 \rightarrow 0 + \text{prenos} = 0$$

$$0+1 = 1 \rightarrow 1 + \text{prenos} = 0$$

$$1+0 = 1 \rightarrow 1 + \text{prenos} = 0$$

$$1+1 = 2 \rightarrow 0 + \text{prenos} = 1$$

x_0		0		0		1		1
y_0		0		1		0		1
c_0	0		0		0		1	
z_0		0		1		1		0

- Seštevanje x_i in y_i in c_{i-1} (prenos z nižjega mesta)
(rezultat = vsota z_0 in prenos na višje mesto c_0)

$$0+0+0 = 0 \rightarrow 0 + \text{prenos} = 0$$

$$0+0+1 = 1 \rightarrow 1 + \text{prenos} = 0$$

...

$$1+0+0 = 1 \rightarrow 1 + \text{prenos} = 0$$

$$1+0+1 = 2 \rightarrow 0 + \text{prenos} = 1$$

...

$$1+1+0 = 2 \rightarrow 0 + \text{prenos} = 1$$

$$1+1+1 = 3 \rightarrow 1 + \text{prenos} = 1$$

x_i		0		0			1		1
y_i		0		0			1		1
c_{i-1}		0		1	...		0		1
c_0	0		0			1		1	
z_0		0		1			0		1

1.2 Odštevanje

- Odštevanje x_0 in y_0 (bit 0 pri odštevanju)
(rezultat = razlika d_0 in sposodek b_0)

$$0-0 = 0 \rightarrow 0 ; \text{sposodek} = 0$$

$$0-1 = -1 \rightarrow 1 ; \text{sposodek} = 1$$

$$1-0 = 1 \rightarrow 1 ; \text{sposodek} = 0$$

$$1-1 = 0 \rightarrow 0 ; \text{sposodek} = 0$$

x_0		0		0		1		1
y_0		0		1		0		1
b_0	0		1		0		0	
d_0		0		1		1	1	0

- Odštevanje x_i in y_i in b_{i-1} (sposodek iz nižjega mesta)
(rezultat = razlika d_0 in sposodek d_0)

$$0-0-0 = 0 \rightarrow 0 ; \text{sposodek} = 0$$

$$0-0-1 = -1 \rightarrow 1 ; \text{sposodek} = 1$$

...

$$1-0-0 = 1 \rightarrow 1 ; \text{sposodek} = 0$$

$$1-0-1 = 0 \rightarrow 0 ; \text{sposodek} = 0$$

...

$$1-1-0 = 0 \rightarrow 0 ; \text{sposodek} = 0$$

$$1-1-1 = -1 \rightarrow 1 ; \text{sposodek} = 1$$

x_i		0		0			1		1
y_i		0		0			1		1
b_{i-1}		0		1	...		0		1
b_0	0		1			0		1	
d_0		0		1			0		1

1.3 Primer 4-bitnega seštevanja in odštevanja

□ Seštevanje: $6 + 7 = 13$; $7 + 11 = 18$

		0	1	1	0	(6)
+		0	1	1	1	(7)
	0	1	1	0		
		1	1	0	1	(13)

		0	1	1	1	(7)
+		1	0	1	1	(11)
	1	1	1	1		
		0	0	1	0	(18)

□ Odštevanje: $6 - 4 = 2$; $7 - 11 = -4$

		0	1	1	0	(6)
-		0	1	0	0	(4)
	0	0	0	0		
		0	0	1	0	(2)

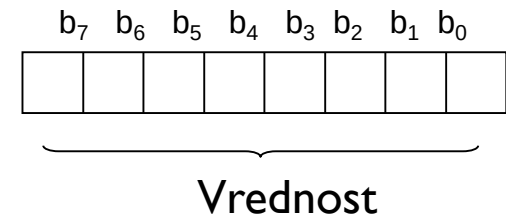
		0	1	1	1	(7)
-		1	0	1	1	(11)
	1	0	0	0		
		1	1	0	0	(-4)

2. Predstavitev dvojiških števil

□ **Nepredznačena** števila (0, 1, 2, ...)

- n – število bitov
- Vsi biti predstavljajo vrednost števila
- Območje števil: $0 \leq N \leq 2^n - 1$
- Primer: 6-bitov ($0_{10} - 63_{10}$ in $000000_2 - 111111_2$)

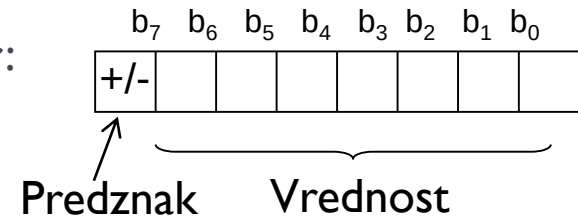
Primer:



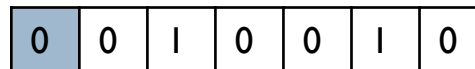
□ **Predznačena** števila (... , -2, -1, 0, 1, 2, ...)

- n – število bitov
- Bit b_{n-1} (najbolj levi bit) - predznak
 - $b_{n-1} = 0 \rightarrow$ pozitivno število
 - $b_{n-1} = 1 \rightarrow$ negativno število
- Zapis kot **predznak (1 bit) in vrednost (n-1 bitov)**
območje števil: $-(2^{n-1}-1) \leq N \leq (2^{n-1}-1)$

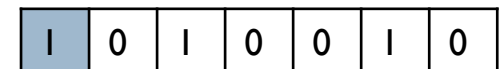
Primer:



Primer: $+18_{10}$:



-18_{10}

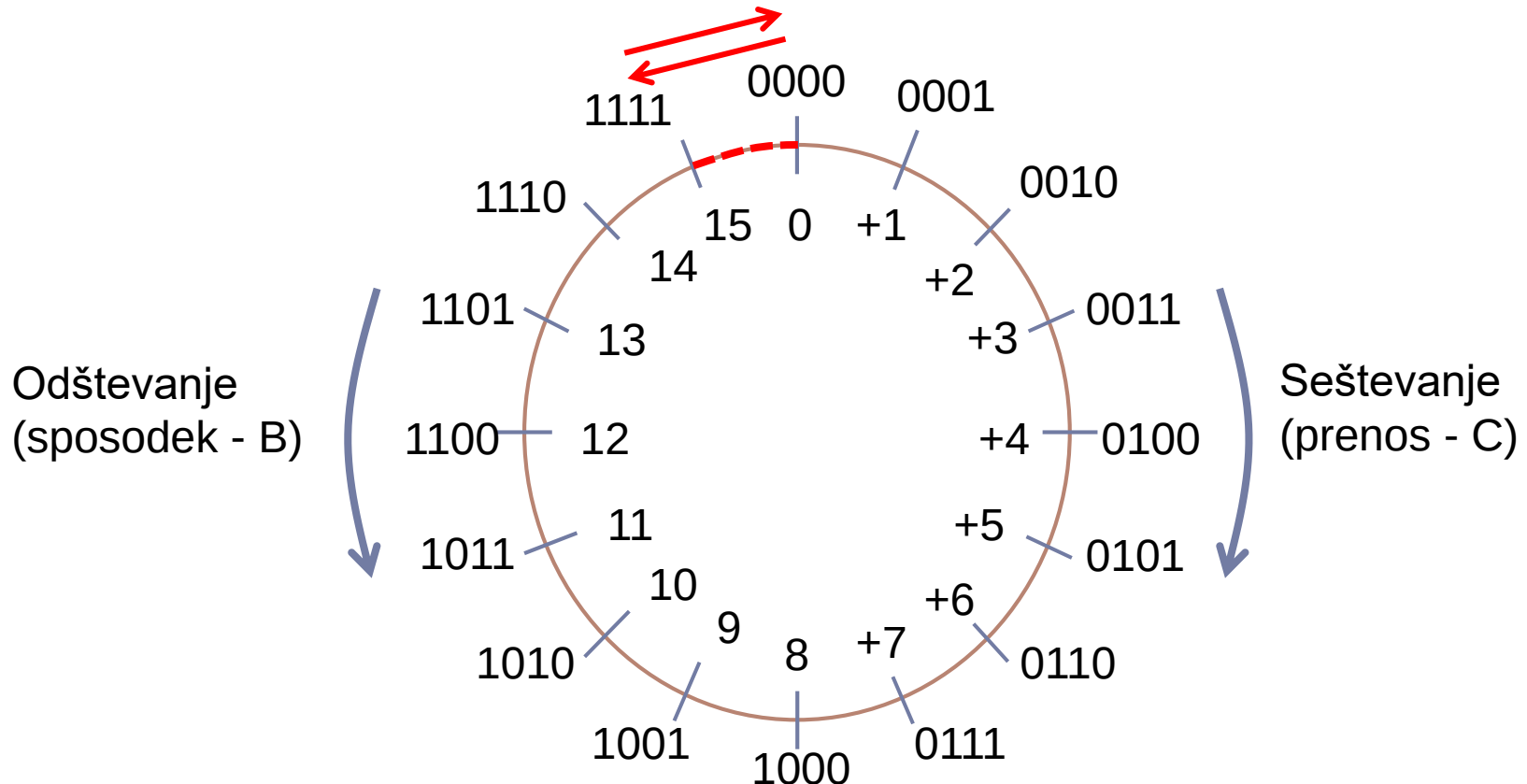


- Zapis v **dvojiškem komplementu**

2.1 Nepredznačena števila

Seštevanje – območje preseženih veljavnih vrednosti določa prenos (C)

Odštevanje – območje preseženih veljavnih vrednosti določa sposodek (B)



C – prenos (carry): $c_i = 1$, če je $\sum x_i + y_i + c_{i-1} \geq r$, sicer $c_i = 0$

B – sposodek (borrow): $b_i = 1$, če je $\sum x_i - y_i - b_{i-1} < 0$ sicer $b_i = 0$

Primer: Seštevanje 4- bitnih nepredznačenih števil (C - prenos)

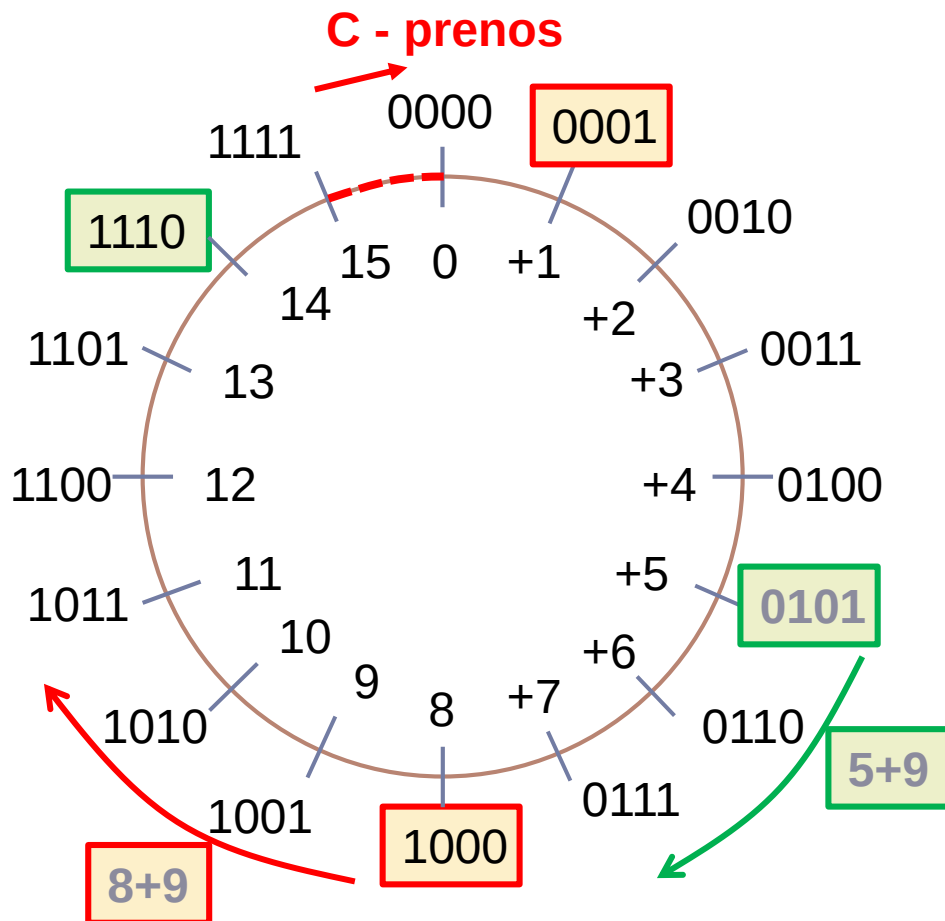
□ $n = 4$, območje števil: $0 \leq N \leq 2^4 - 1 = 15$ (0 – 15)

$$\begin{array}{r} 0101 \quad (5) \\ + 1001 \quad + (9) \\ \hline \textcolor{red}{0}001 \quad c_i \\ 1110 \quad (14) \end{array}$$

Prenos $c_3 = C = 0$

$$\begin{array}{r} 1000 \quad (8) \\ + 1001 \quad + (9) \\ \hline \textcolor{red}{1}000 \quad c_i \\ 0001 \quad (17) \end{array}$$

Pričakujemo vsoto 17,
dejansko pa je v 4-bitih vsota 1
in prenos $c_3 = C = 1$



Primer: Odštevanje 4-bitnih nepredznačenih števil (B - sposodek)

■ $n = 4$, območje števil: $0 \leq N \leq 2^4 - 1 = 15$ (0 – 15)

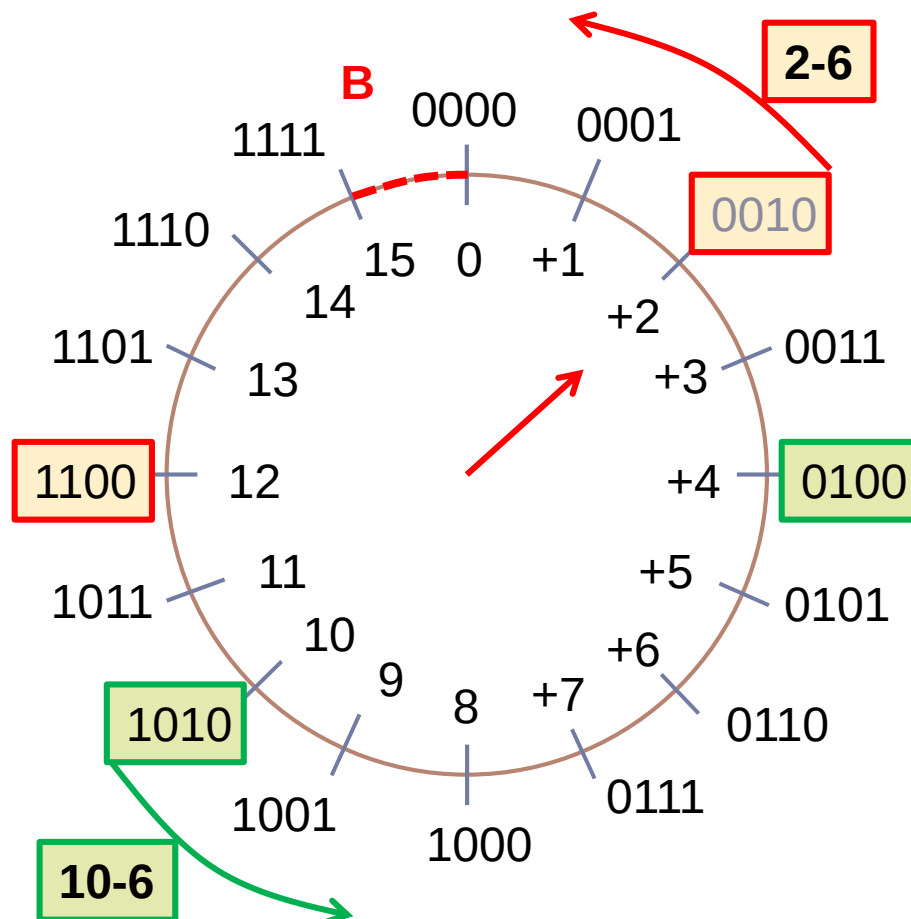
$$\begin{array}{r} 1010 \quad (10) \\ - 0110 \quad (6) \\ \hline 0100 - b_i \\ \underline{0100} \quad (4) \end{array}$$

Sposodek $b_3 = B = 0$

$$\begin{array}{r} 0010 \quad (2) \\ - 0110 \quad - (6) \\ \hline \textcolor{red}{1}100 - b_i \\ \hline 1100 \quad 12 \quad \textcolor{red}{?}(-4) \end{array}$$

Napačen rezultat!

Pričakujemo razliko -4,
dejansko pa je v 4-bitih razlika
12 in sposodek $b_3 = B = 1$.



2.2 Predznačena števila

❑ Številu X dodamo dodaten bit, to je predznak:

- Pozitivno število - vrednost je binarni zapis števila X in predznak 0
- Negativno število - vrednost je 2'Komplement števila X in predznak 1

❑ Zapis števila v 2'Komplementu (2'K):

- X pretvorimo v X' (zapis v 1'Komplementu (1'K): $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0$)
- $Y = X' + 1$ (prištejemo 1)

Primer: $X = 6 \rightarrow Y = -6$ (pretvorba števila z dodanim predznakom)

1	1	0		6
0	0	1	1'K	
		1	+1	
0	1	0	2'K	

0	1	1	0
---	---	---	---

= + 6

Predznak (+) Vrednost

1	0	1	0
---	---	---	---

= - 6

Predznak (-) 2' komplement

❑ Zapis števila na 8-bitov – raztegnemo predznak (vodilna 0 ali vodilna 1)

(+6) $\rightarrow$ 00000110

(-6) $\rightarrow$ 11111010

□ Zapis števil v tabeli ($n = 4$)

$$-(2^{n-1}) \leq N \leq (2^{n-1} - 1)$$

$$-8 \leq N \leq +7$$

□ Pretvorba:

- Pozitivno (+) → Negativno (-)

$$X = 0100 \text{ (+4)}$$

$$X' = 1011$$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = 1100 \text{ (-4)}$$

- Negativno (-) → Pozitivno (+)

$$X = 1101 \text{ (-3)}$$

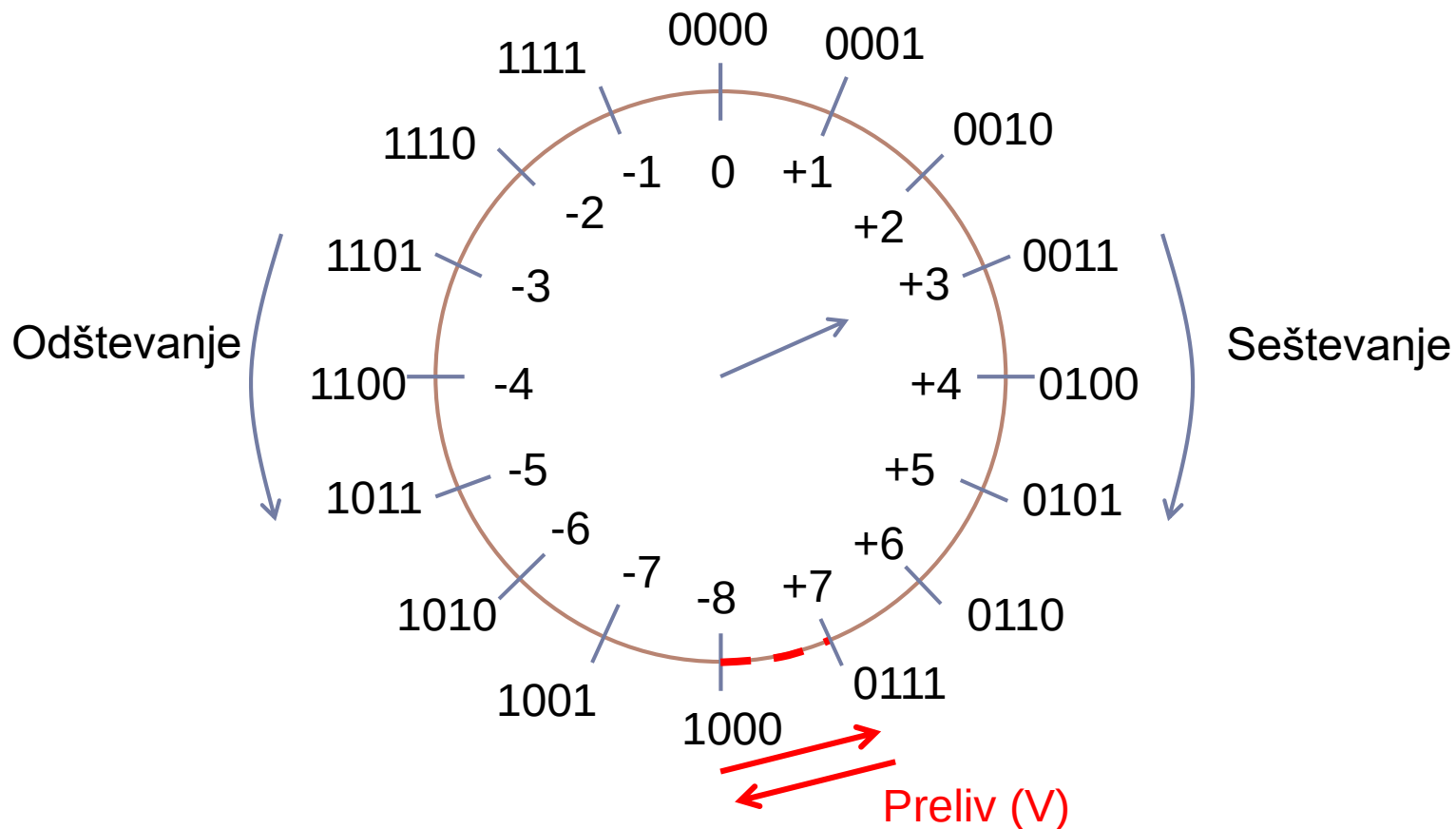
$$X' = 0010$$

$$\begin{array}{r} 0010 \\ +1 \\ \hline \end{array}$$

$$Y = 0011 \text{ (+3)}$$

Desetiško število	Dvojiški zapis	Desetiško število	Dvojiški zapis
+7 ($2^3 - 1$)	0111	0	0000
+6	0110	+1	0001
+5	0100	+2	0010
+4	0100	+3	0011
+3	0011	+4	0100
+2	0010	+5	0101
+1	0001	+6	0110
0	0000	+7 ($2^3 - 1$)	0111
-1	1111	-8 (-2^3)	1000
-2	1110	-7	1001
-3	1101	-6	1010
-4	1100	-5	1011
-5	1011	-4	1100
-6	1010	-3	1101
-7	1001	-2	1110
-8 (-2^3)	1000	-1	1111

Primer: Seštevanje predznačenih števil (PRELIV - V)



Preliv (V-overflow) = 1, če je vsota dveh števil z enakim predznakom nasprotnega predznaka: **(+, +) → -** ali **(-, -) → +**

- Prenos (C) – se ne upošteva za določanje pravilnosti rezultata
- Preliv (V) je 1, če sta zadnja dva prenosa različna ($c_{n-1} \neq c_{n-2}$)

Primer: $2 + 5 = 7$

$$\begin{array}{r} 0010 \\ + 0101 \\ \hline \textcolor{red}{00}00 - c_i \\ 0111 \end{array}$$

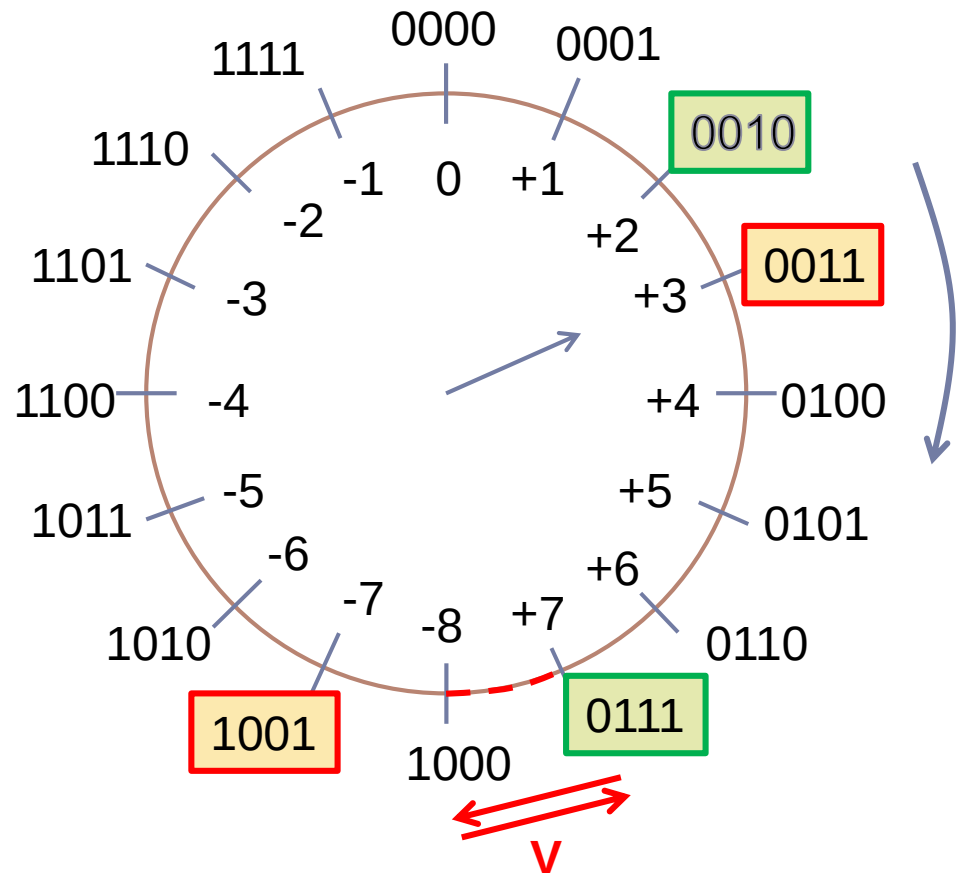
Pravilno

Primer: $3 + 6 = 9$

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0110 \\ \hline \textcolor{red}{01}10 - c_i \\ 1001 \end{array}$$

Napačno

Preliv: $(+,+) \rightarrow (-)$, $V = 1$



Primer: Odštevanje: $X - Y \rightarrow$ **Seštevanje:** $X + (-Y)$

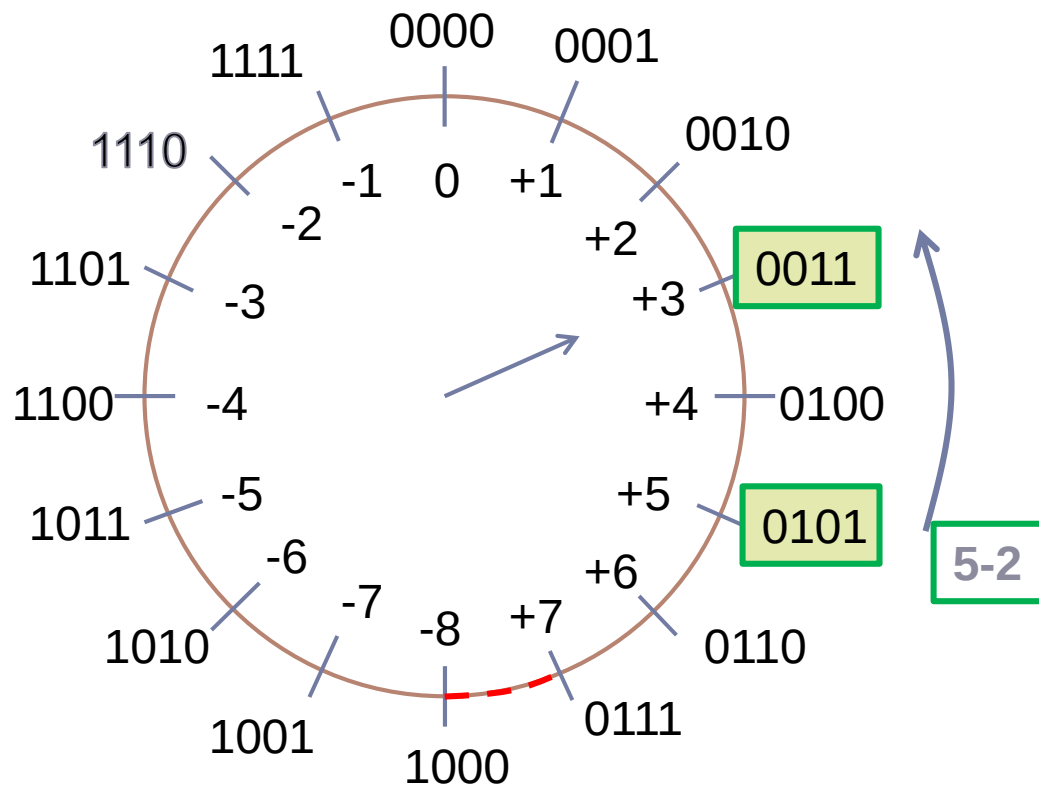
□ $D = X - Y$

□ Seštevanje: $D = X + (-Y)$

Primer: $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$

	0010	(+2)
	1101	
	<u>+1</u>	
	1110	(-2)
	0101	(5)
+	1110	
	<u>1100</u>	- c_i
	0011	(3) Pravilno

Preliv: $(+,-) \rightarrow (+), V = 0$



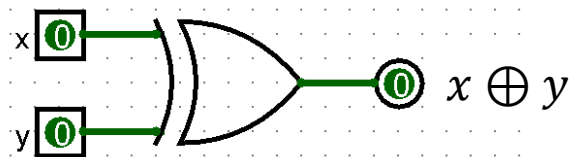
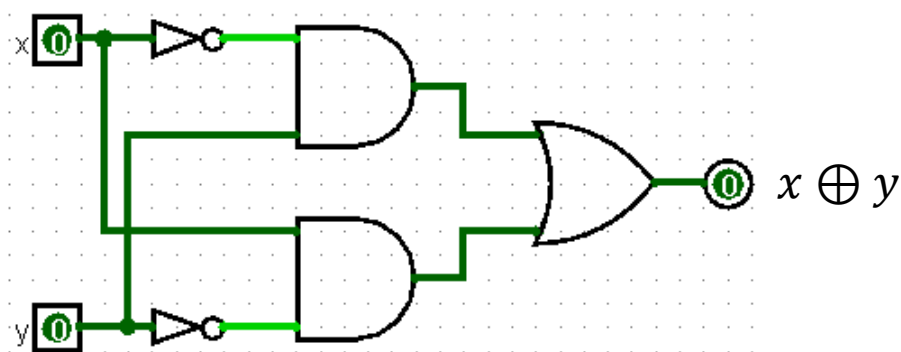
3 Funkciji XOR in XNOR

❑ Funkcija XOR (Exclusive OR)

- izhod je 1, če sta vhoda različna ($x=0$ in $y=1$ ali $x=1$ in $y=0$)
- izhod je 0, če sta vhoda enaka ($x=0$ in $y=0$ ali $x=1$ in $y=1$)

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} = \\ &= x \oplus y \end{aligned}$$



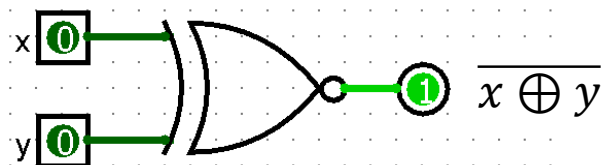
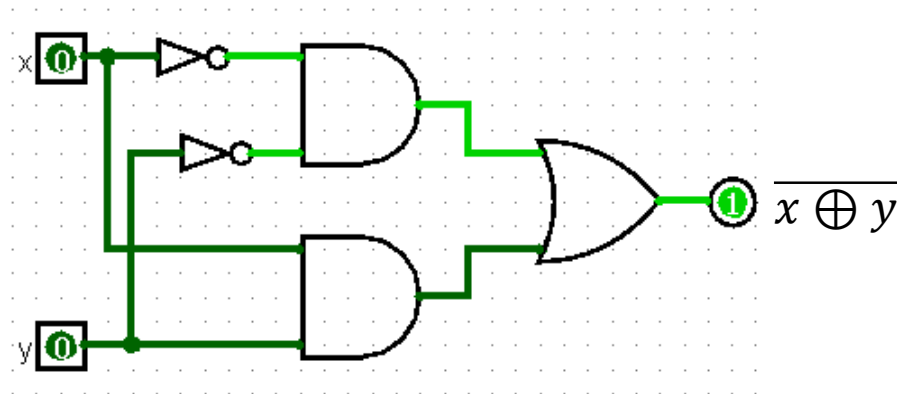
❑ Funkcija XOR za $n=3,4,\dots$ (liho število enic $\rightarrow$ izhod = 1)

❑ Funkcija XNOR (Exclusive-NOR)

- izhod je 1, če sta vhoda enaka ($x=0$ in $y=0$ ali $x=1$ in $y=1$)
- izhod je 0, če sta vhoda različna ($x=0$ in $y=1$ ali $x=1$ in $y=0$)

x	y	$\overline{x \oplus y}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y = \\ &= \overline{x \oplus y} \end{aligned}$$



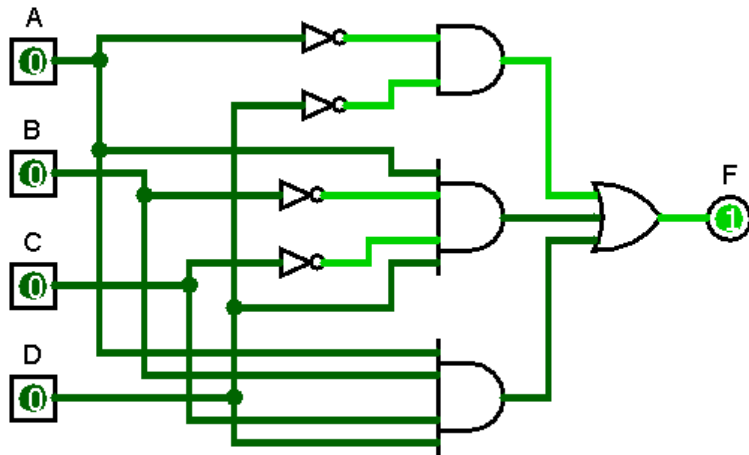
❑ Funkcija XNOR za $n=3,4,\dots$ (kombinacija ničel in sodo število enic $\rightarrow$ izhod = 1)

3.1 Uporaba funkcij XOR in XNOR

□ V zapisu logičnih funkcij so izrazi, ki se poenostavijo z XOR ali XNOR.

$$f(A, B, C, D) =$$

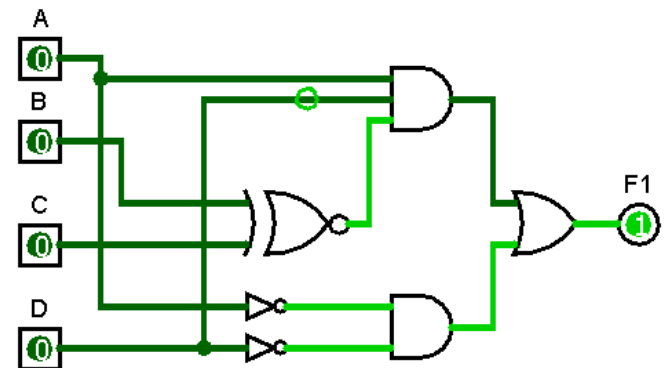
$$= A \cdot B \cdot C \cdot D \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot D \vee \bar{A} \cdot \bar{D} =$$



$$= A \cdot D \cdot (B \cdot C \vee \bar{B} \cdot \bar{C}) \vee \bar{A} \cdot \bar{D}$$

$$= A \cdot D \cdot (\overline{B \oplus C}) \vee \bar{A} \cdot \bar{D}$$

	$\bar{C} \cdot \bar{D}$	$\bar{C} \cdot D$	$C \cdot D$	$C \cdot \bar{D}$
$\bar{A} \cdot \bar{B}$	1			1
$\bar{A} \cdot B$	1			1
$A \cdot B$			1	
$A \cdot \bar{B}$		1		



3.2 Funkcijsko poln sistem za XOR

- ❑ Potrebujemo operatorje: (XOR, AND, I)
- ❑ Zapis logičnih funkcij NOT in OR z izbranim naborom operatorjev:

$$x \oplus y = \bar{x}.y \vee x.\bar{y}$$

$$\bar{x} = \bar{x}.1 \vee x.0 = x \oplus 1$$

$$x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = (x \oplus 1).(y \oplus 1) \oplus 1$$



- ❑ Vse funkcije je mogoče realizirati z novim naborom operatorjev

a) PDNO

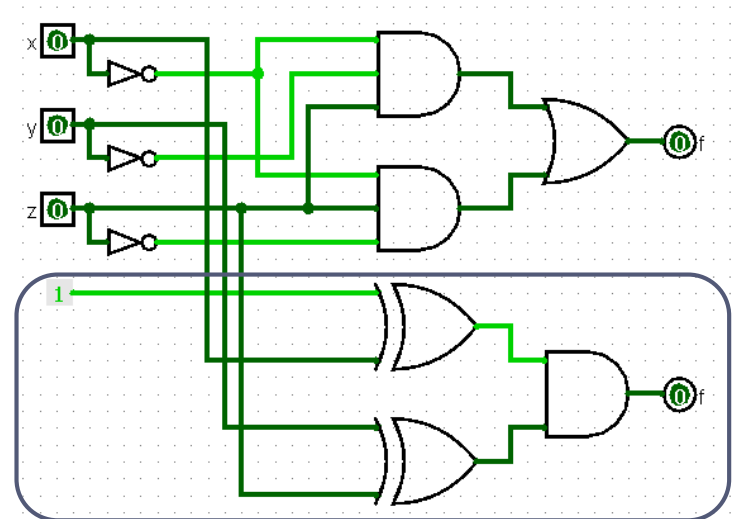
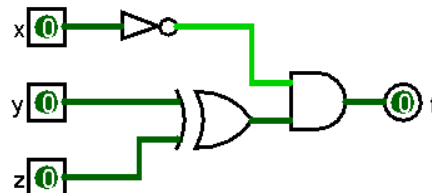
$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z}$$

b) (XOR, AND, 1)

$$f(x, y, z) = \bar{x}.(y.z \vee y.\bar{z}) =$$

$$= \bar{x}.(y \oplus z) =$$

$$= (x \oplus 1).(y \oplus z)$$



Linearna funkcija

- Linearne funkcije: (XOR, I): $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus \dots \oplus a_n \cdot x_n$
- Vhodne kombinacije – zapis enačb za

$$f(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2$$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f_0 = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 0 = a_0$$

$$f_1 = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 0 \oplus a_2 \cdot 1 = a_0 \oplus a_2$$

$$f_2 = 1 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 0 = a_0 \oplus a_1$$

$$f_3 = 0 = a_0 \oplus a_1 \cdot 1 \oplus a_2 \cdot 1 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2$$

- Izračun koeficientov:

$$0 = a_0$$

$$1 = a_0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 1$$

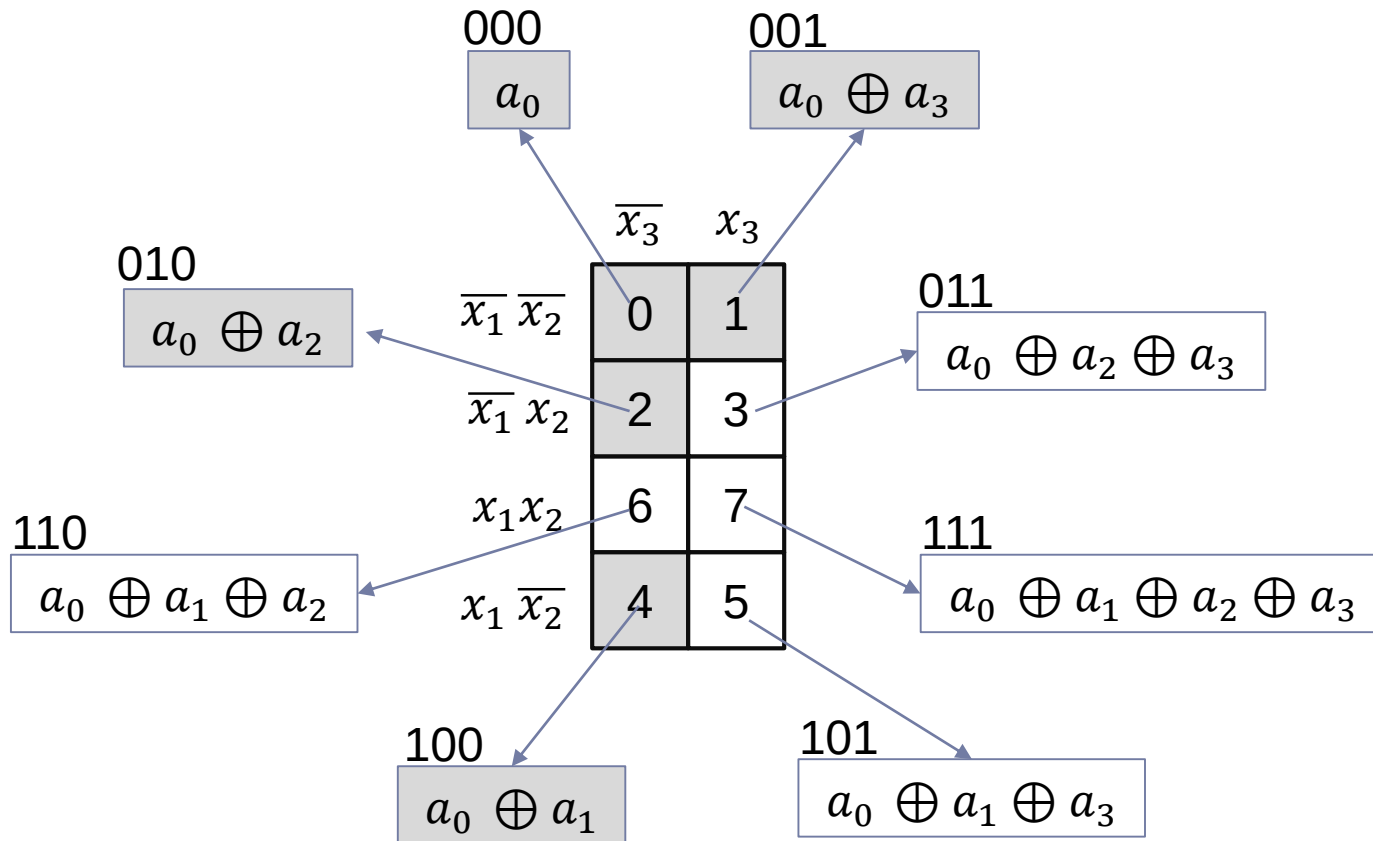
$$1 = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$0 = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

- Funkcija: $f(x_1, x_2) = 0 \oplus 1 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 = x_1 \oplus x_2$

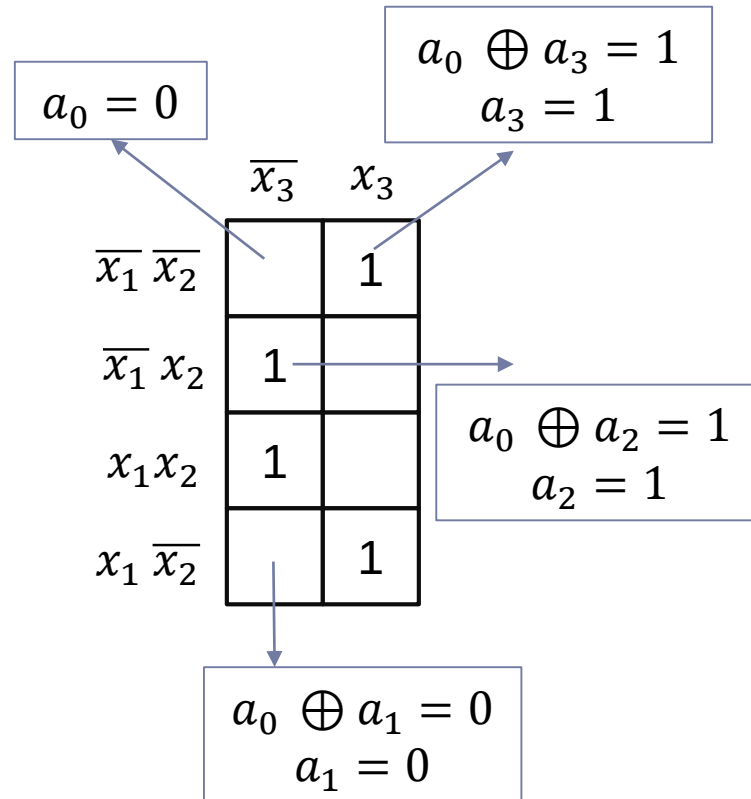
$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3$$

□ Enačbe za izračun koeficientov a_0, a_1, a_2, a_3



$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3$$

□ Izračun koeficientov: a_0, a_1, a_2, a_3



□ Zapis linearne enačbe

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 \cdot x_1 \oplus a_2 \cdot x_2 \oplus a_3 \cdot x_3 = 0 \oplus 0 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 1 \cdot x_3 = x_2 \oplus x_3$$

Primer 1: Linearne funkcije

❑ Funkcija $g(x,y,z)$ ima vrednost 1 takrat, ko:

- so na vходу same ničle
- je liho število enic na vходу

❑ Zapis funkcije z XOR

❑ ? Linearna funkcija

x	y	z	g	$\bar{g}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1

g	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$	1	
$\bar{x} y$		1
$x y$	1	
$x \bar{y}$		1

$\bar{g}$	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$		1
$\bar{x} y$	1	
$x y$		1
$x \bar{y}$	1	

$$\begin{aligned}
 g &= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.y.z \vee x.\bar{y}.z \vee x.y.\bar{z} = \\
 &= \bar{x}.(\bar{y}.\bar{z} \vee y.z) \vee x.(\bar{y}.z \vee y.\bar{z}) = \\
 &= \bar{x}.(\overline{y \oplus z}) \vee x.(y \oplus z) = \\
 &= \overline{x \oplus y \oplus z}
 \end{aligned}$$

Zapis negacije z XOR

$$g = 1 \oplus x \oplus y \oplus z$$

$$\begin{aligned}
 \bar{g} &= \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} \vee x.\bar{y}.\bar{z} \vee x.y.z = \\
 &= \bar{x}.(\bar{y}.z \vee y.\bar{z}) \vee x.(\bar{y}.\bar{z} \vee y.z) = \\
 &= \bar{x}.(y \oplus z) \vee x.(\overline{y \oplus z}) = \\
 &= x \oplus y \oplus z
 \end{aligned}$$

Primer 2: Poenostavitev funkcij z uporabo vrat XOR

- Podana je logična funkcija. Zapišite jo z operatorji XOR, in konstanto 1,

Izračun iz minimalne vsote produktov (MDNO)

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	1			1
$\bar{A}.B$		1	1	
$A.B$	1			1
$A.\bar{B}$		1	1	

$$F(A, B, C, D) =$$

$$= \bar{A}.\bar{B}.\bar{D} \vee \bar{A}.B.D \vee A.B.\bar{D} \vee A.\bar{B}.D$$

$$= \bar{A}.(\bar{B}.\bar{D} \vee B.D) \vee A.(B.\bar{D} \vee \bar{B}.D)$$

$$= \bar{A}.(\overline{B \oplus D}) \vee A.(B \oplus D)$$

$$= \overline{A \oplus (B \oplus D)} = \overline{A \oplus B \oplus D} = 1 \oplus A \oplus B \oplus D$$

$$F(A, B, C, D) = a_0 \oplus a_1 A \oplus a_2 B \oplus a_3 C \oplus a_4 D$$

- Podana je logična funkcija v Karnaughjevem diagramu. Funkcija se ne da poenostavit po pravilu sosednosti - Izračun iz vsote produktov (PDNO).

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	1		1	
$\bar{A}.B$		1		1
$A.B$	1		1	
$A.\bar{B}$		1		1

$$a_0 = 1;$$

$$a_0 \oplus a_4 = 0 \rightarrow 1 \oplus a_4 = 0 \rightarrow a_4 = 1$$

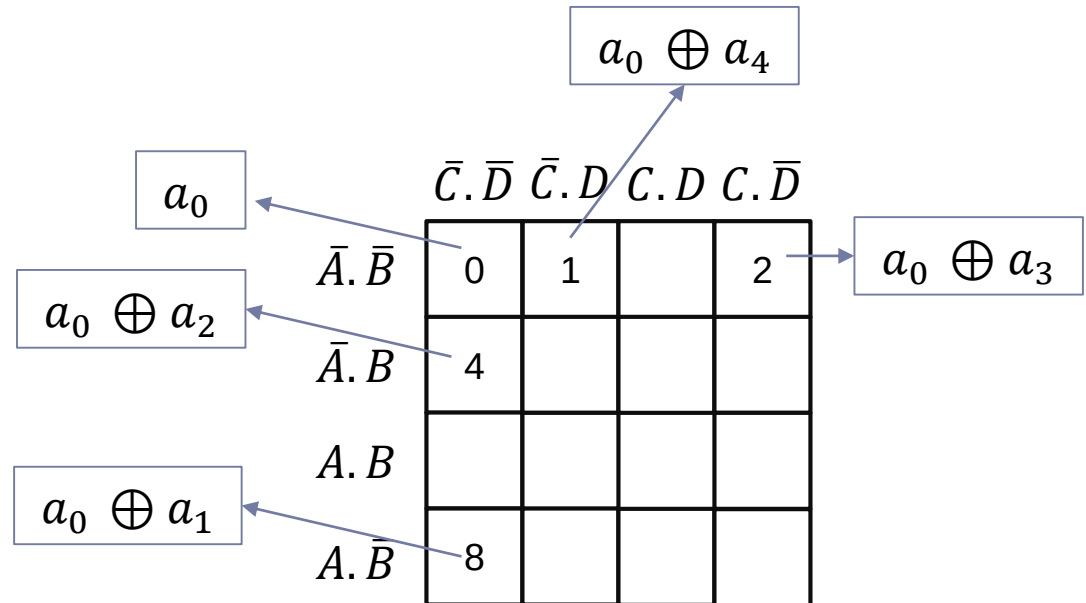
$$a_0 \oplus a_3 = 0 \rightarrow 1 \oplus a_3 = 0 \rightarrow a_3 = 1$$

$$a_0 \oplus a_2 = 0 \rightarrow 1 \oplus a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 1$$

$$a_0 \oplus a_1 = 0 \rightarrow 1 \oplus a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 1$$

Linearni polinom: $F(A, B, C, D) = a_0 \oplus a_1 A \oplus a_2 B \oplus a_3 C \oplus a_4 D$

Vstavimo izračunane koeficiente: $F(A, B, C, D) = 1 \oplus A \oplus B \oplus C \oplus D$



Primer 3: Grayeva koda (MDNO $\rightarrow$ XOR)

❑ Pretvorba dvojiške kode v Grayevo kodo

b_2	b_1	b_0	g_2	g_1	g_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0

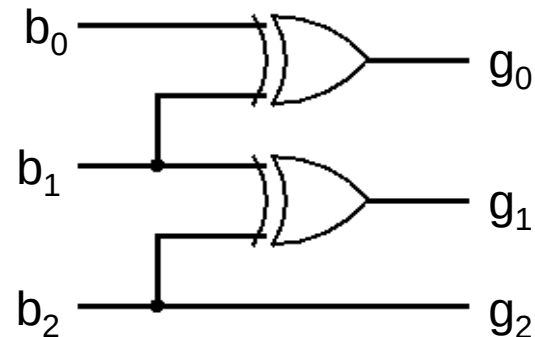
g_1	$\bar{b}_0$	b_0
$\bar{b}_2 \bar{b}_1$		
$\bar{b}_2 b_1$	I	I
$b_2 b_1$		
$b_2 \bar{b}_1$	I	I

g_0	$\bar{b}_0$	b_0
$\bar{b}_2 \bar{b}_1$		I
$\bar{b}_2 b_1$	I	
$b_2 b_1$	I	
$b_2 \bar{b}_1$		I

$$g_2 = b_2$$

$$g_1 = \bar{b}_2 \cdot b_1 \vee b_2 \cdot \bar{b}_1 = b_2 \oplus b_1$$

$$g_0 = \bar{b}_1 \cdot b_0 \vee b_1 \cdot \bar{b}_0 = b_1 \oplus b_0$$



4. Seštevalniki

□ POLOVIČNI seštevalnik

- Vhoda: x_0, y_0
- Izhoda: z_0, c_0
- Funkciji za izračun izhodov:

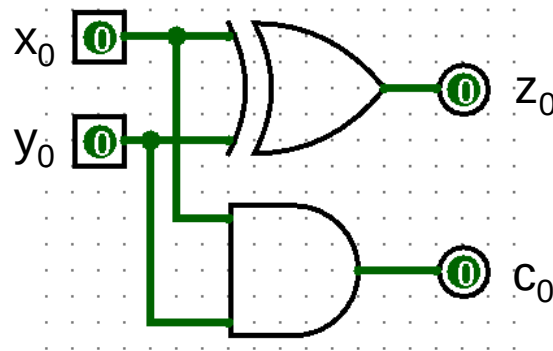
$$z_0 = x_0 + y_0$$

$$c_0 = 1, \text{ če je } x_0 + y_0 = 2$$

x_0	y_0	c_0	z_0
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$z_0 = x_0 \oplus y_0$$

$$c_0 = x_0 \cdot y_0$$



❑ POLNI seštevalnik

- Vhodi: x_0, y_0, c_{-1}
- Izhoda: z_0, c_0
- Funkciji za izračun izhodov:

$$z_0 = x_0 + y_0 + c_{-1};$$

$$c_0 = 1, \text{ če je } x_0 + y_0 + c_{-1} \geq 2$$

x_0	y_0	c_{-1}	c_0	z_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

	$\overline{c_{-1}}$	c_{-1}
$\overline{x_0} \overline{y_0}$		
$\overline{x_0} y_0$		1
$x_0 y_0$	1	1
$x_0 \overline{y_0}$		1

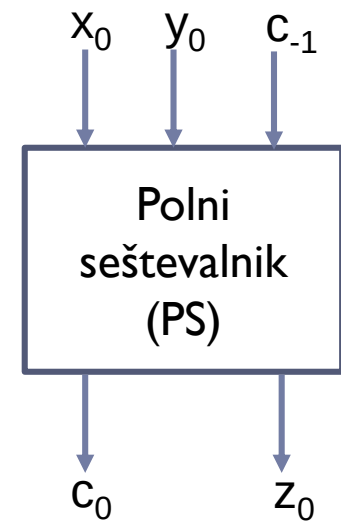
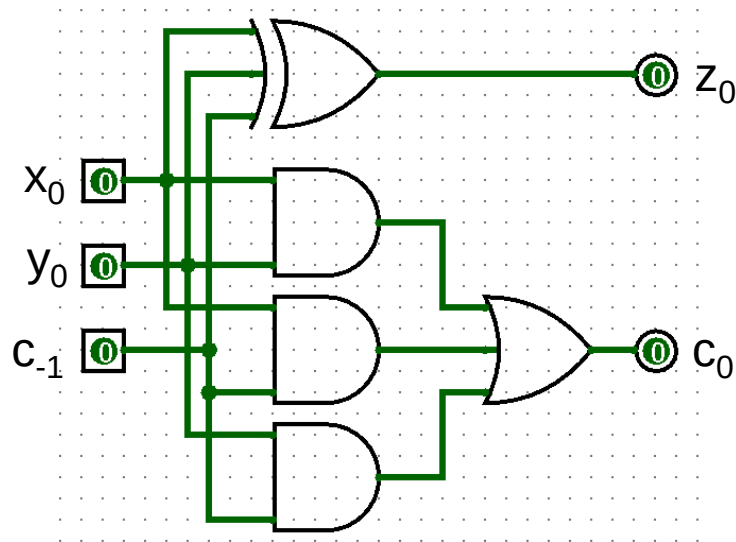
$$c_0 = x_0 \cdot y_0 \vee x_0 c_{-1} \vee y_0 c_{-1}$$

	$\overline{c_{-1}}$	c_{-1}
$\overline{x_0} \overline{y_0}$		1
$\overline{x_0} y_0$	1	
$x_0 y_0$		1
$x_0 \overline{y_0}$	1	

$$z_0 = \overline{x_0} \cdot \overline{y_0} \cdot c_{-1} \vee \overline{x_0} \cdot y_0 \cdot \overline{c_{-1}} \vee x_0 \cdot \overline{y_0} \cdot c_{-1} \vee x_0 \cdot y_0 \cdot c_{-1}$$

Poenostavitev - Booleova algebra

$$z_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus c_{-1}$$



□ Polni seštevalnik –

sestavljata ga dva polovična seštevalnika in logična vrata OR

$$z_0 = x_0 \oplus y_0 \oplus c_{-1} = (x_0 \oplus y_0) \oplus c_{-1} = z_{01} \oplus c_{-1}$$

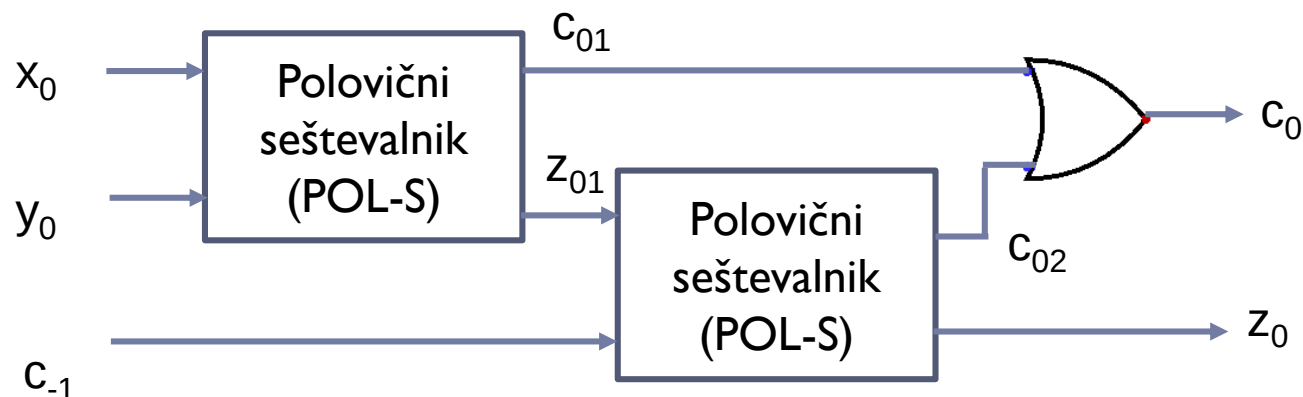
$$c_0 = \bar{x}_0 \cdot y_0 \cdot c_{-1} \vee x_0 \cdot \bar{y}_0 \cdot c_{-1} \vee x_0 \cdot y_0 \cdot \bar{c}_{-1} \vee x_0 \cdot y_0 \cdot c_{-1}$$

$$= c_{-1} \cdot (\bar{x}_0 \cdot y_0 \vee x_0 \cdot \bar{y}_0) \vee x_0 \cdot y_0 \cdot (\bar{c}_{-1} \vee c_{-1})$$

$$= c_{-1} \cdot (x_0 \oplus y_0) \vee x_0 \cdot y_0$$

$$= c_{-1} \cdot z_{01} \vee c_{01}$$

$$= c_{02} \vee c_{01}$$



6. Primer n-bitnega seštevalnika

□ Vhodi:

$$X = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0)$$

$$Y = (y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0)$$

c_{-1} - prenos na vhodu

□ Izhodi:

$$Z = (z_{n-1}, z_{n-2}, \dots, z_0)$$

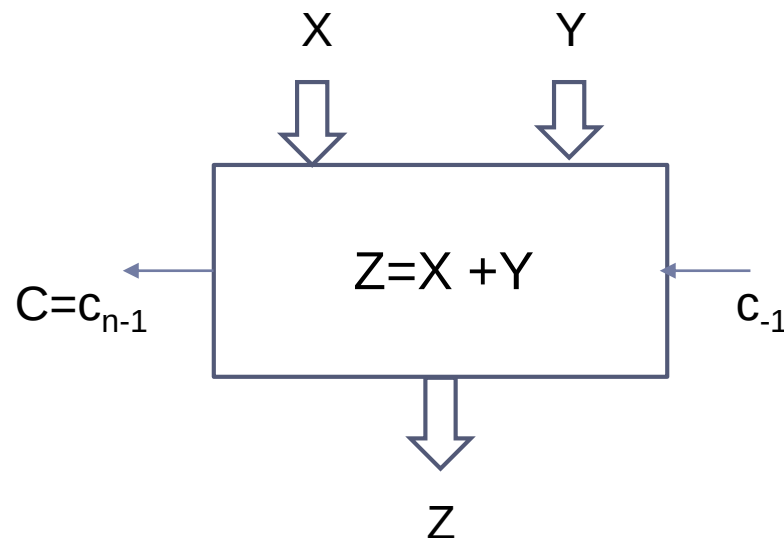
C – prenos (c_{n-1})

□ Operacija:

- Seštevanje

□ Način izvedbe seštevanja $Z = X + Y + c_{-1}$

- paralelno seštevanje x_i in y_i , zaporedni izračun prenosa $c_0, c_1, \dots$
- paralelno seštevanje x_i in y_i s paralelnim izračunom prenosa (vnaprejšnji izračun prenosov)

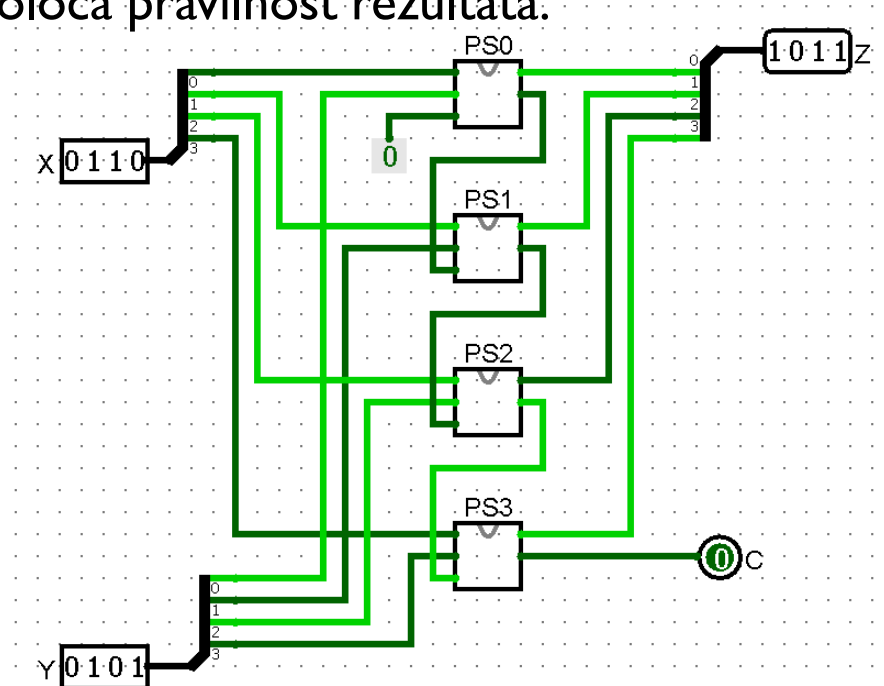


Primer 1: 4-bitni seštevalnik

Nepredznačena števila: $X = 6$, $Y = 5$, $Z = 5 + 6 = 11$

- Vezje za seštevanje se imenuje 'ripple adder'.
- Seštevanje je izvedeno s štirimi polnimi seštevalniki, prenos se upošteva po korakih od bita LSB (bit b_0) do bita MSB (bit 3).
- Začetni prenos $c_{-1} = 0$
- Zadnji prenos c_3 je zastavica C, ki določa pravilnost rezultata.

		b_3	b_2	b_1	b_0
X		0	1	1	0
Y		0	1	0	1
	0 c_3	1 c_2	0 c_1	0 c_0	
Z		1	0	1	1



Primer 2: 4-bitni seštevalnik z zastavico za preliv (V)

Predznačena števila ($n=4$, predznak + vrednost) - izračun **preliva** $V = c_3 \oplus c_2$

X			0	1	1	0			6_{10}
Y			0	1	0	0		+	4_{10}
		c_3	c_2	c_1	c_0	c_{-1}			
	+	0	1	0	0				
Z			1	0	1	0			10_{10}

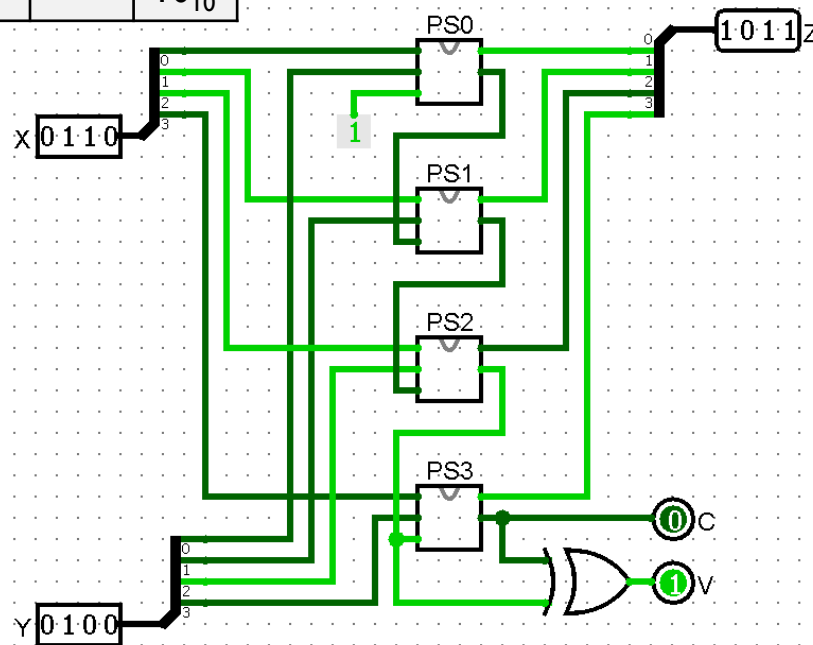
Zastavica
 $C=c_3=0$

Predznak = 1
(negativno število)

NAPAČEN REZULTAT

Vsota $6+4 > 7$

Preliv - $V = c_3 \oplus c_2$

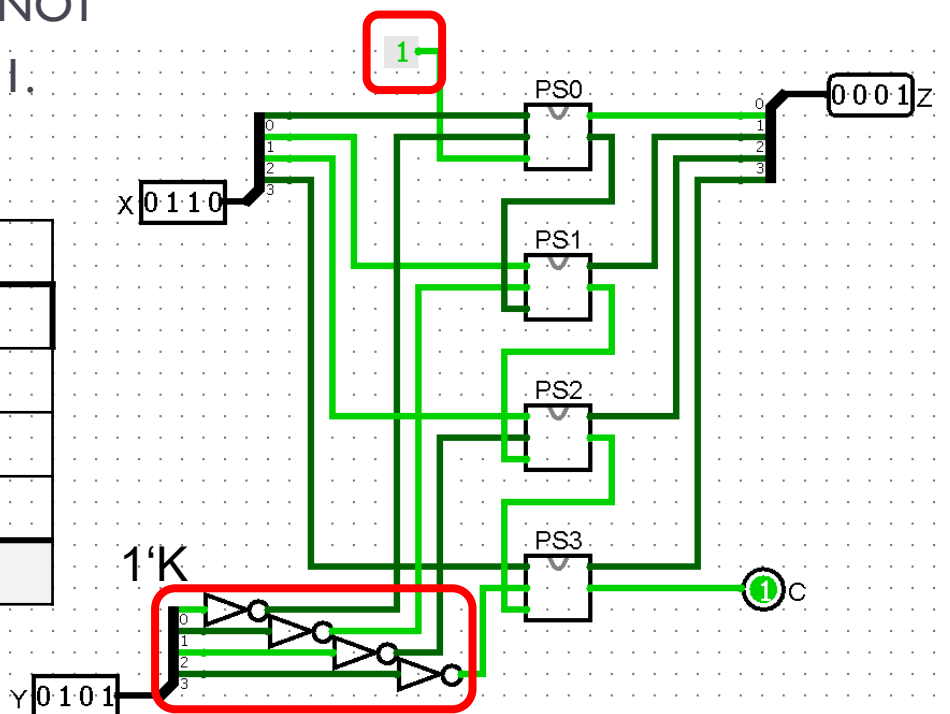


Primer 3: 4-bitni odštevalnik

Odštevalnik - izvedba s **polnimi seštevalniki**: $D = X - Y = X + (-Y)$

- ❑ Primer: $6 + (-5) = 1$
- ❑ Negativno število $(-Y)$ dobimo s pretvorbo števila Y v zapis v 2^k
- ❑ Rešitev:
 - Eniški komplement - logična vrata NOT
 - na mestu b_0 , kjer z (c_{-1}) prištejemo 1.

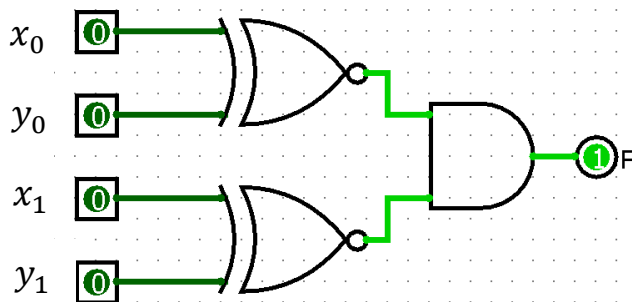
		C	b3	b2	b1	b0
X			0	1	1	0
1'K			1	0	1	0
+1	+					1
-Y	+	1	1	1	0	
D			0	0	0	1



Primer 4: Primerjalnik

- Podani sta 2-bitni števili $X = (x_1, x_0)$ in $Y = (y_1, y_0)$. Načrtovanje vezja za primerjavo z izhodom $P = 1$, če je število X enako številu Y .
- Zapis vsote produktov in poenostavitvev, ki omogoča realizacijo z vrati XNOR in AND

$$\begin{aligned}
 P &= \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0} \vee \overline{x_1} \cdot x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot y_0 \vee \\
 &\quad \vee x_1 \cdot \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot \overline{y_0} \vee x_1 \cdot x_0 \cdot y_1 \cdot y_0 = \\
 &= \overline{x_1} \cdot \overline{y_1} \cdot (\overline{x_0} \cdot \overline{y_0} \vee x_0 \cdot y_0) \vee x_1 \cdot y_1 \cdot (\overline{x_0} \cdot \overline{y_0} \vee x_0 \cdot y_0) = \\
 &= (\overline{x_0} \cdot \overline{y_0} \vee x_0 \cdot y_0) \cdot (\overline{x_1} \cdot \overline{y_1} \vee x_1 \cdot y_1) = \\
 &= (\overline{x_0 \oplus y_0}) \cdot (\overline{x_1 \oplus y_1})
 \end{aligned}$$



x_1	x_0	y_1	y_0	P
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1