

Digitalna vezja, BVS-RI

Mira TREBAR

P3 – Zapis logičnih funkcij, minimizacija

Vsebina

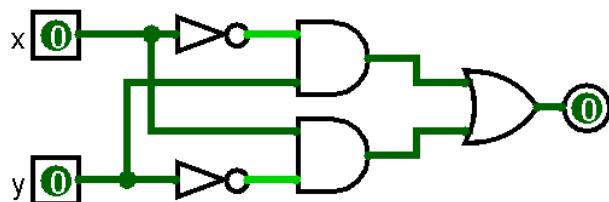
- ❑ Vsota produktov in produkt vsot
- ❑ Poenostavljanje logičnih funkcij-primer
- ❑ Zapis vsote produktov in produkta vsot
- ❑ Karnaughejev diagram in pravilo sosednosti
- ❑ Minimizacija logičnih funkcij
- ❑ Nepopolne logične funkcije
- ❑ Vir:
 - Widmer N.S., Moss G.L., Tocci R.J, Digital Systems Principles in Applications, Pearson Education, 2007 (P4)
 - Trebar, Osnove logičnih vezij (Poglavje 4 Logične funkcije, str. 31-44)
 - Video:

<https://www.youtube.com/watch?v=3vkMgTmieZI>

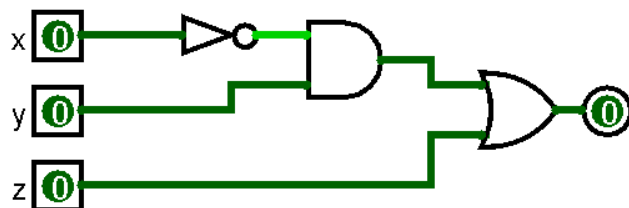
Uvod

□ Kako bi opisali podana logična vezja?

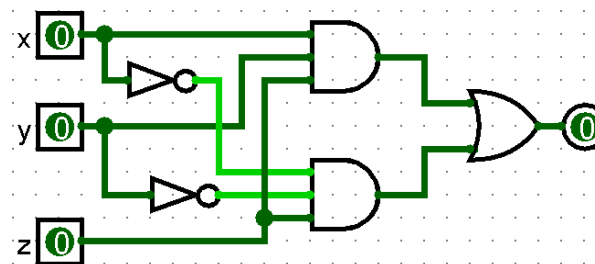
A)



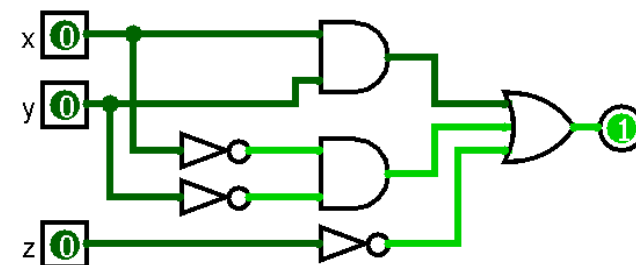
$$\bar{x}.y \vee x.\bar{y}$$



$$\bar{x}.y \vee z$$



$$x.y.z \vee \bar{x}.\bar{y}.z$$



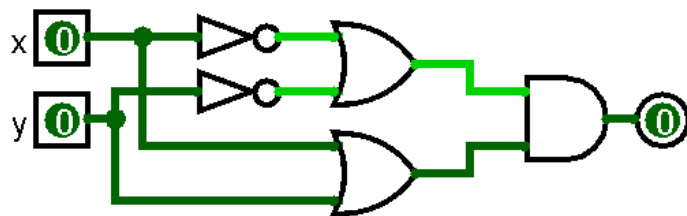
$$x.y \vee \bar{x}.\bar{y} \vee \bar{z}$$

Zapis: vhodi – **konjunkcija (AND)** – **disjunkcija (OR)** – izhod

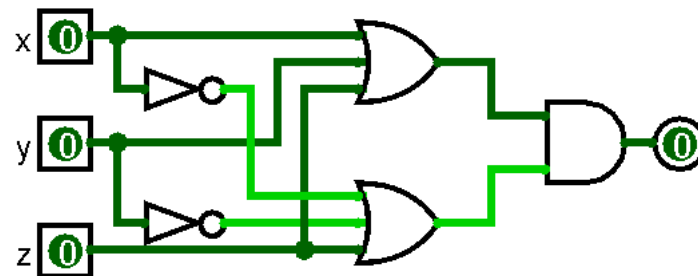
Dvo-nivojska oblika, kjer so na 1.nivoju vrata AND in na 2.nivoju vrata OR

Vhodne spremenljivke so lahko nenegirane (x) ali negirane ($\bar{x}$).

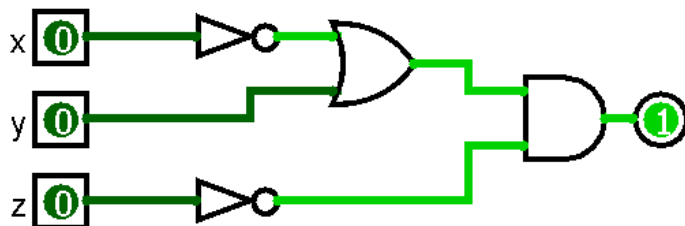
B)



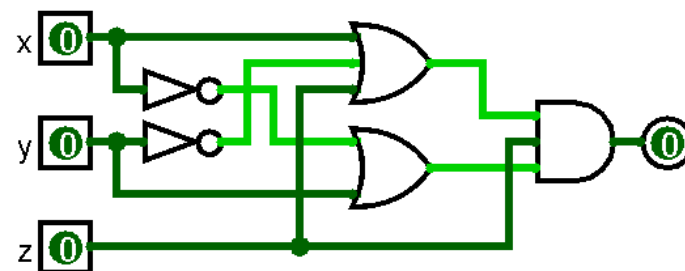
$$(x \vee y) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y})$$



$$(x \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$



$$(\bar{x} \vee y) \cdot \bar{z}$$



$$(x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot z$$

Zapis: vhodi - **disjunkcija (OR)** – **konjunkcija (AND)** – izhod

Dvo-nivojska oblika, kjer so na 1.nivoju vrata OR in na 2.nivoju vrata AND

Vhodne spremenljivke so lahko nenegirane (x) ali negirane ($\bar{x}$).

1 Zapis logičnih funkcij (NOT, AND, OR)

□ Vsota produktov (AND-OR)

$$x \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$\bar{x} \cdot y \vee x \cdot z$$

$$x \cdot y \cdot z \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot \bar{z} \vee w$$

Vsak izraz je sestavljen iz dveh ali več operacij AND, ki so združene z operacijo OR.

Vsaka operacija AND je sestavljena iz ene ali več spremenljivk, ki se pojavljajo v osnovni (x) ali negirani obliki ($\bar{x}$).

□ Produkt vsot (OR-AND)

$$(x \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

$$(\bar{x} \vee y) \cdot (x \vee \bar{z})$$

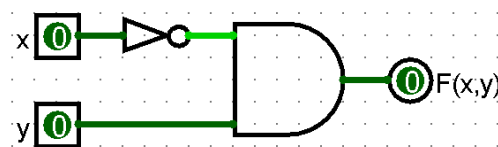
$$(x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot w$$

Vsak izraz je sestavljen iz dveh ali več operacij OR, ki so združene z operacijo AND.

Vsaka operacija OR je sestavljena iz ene ali več spremenljivk, ki se pojavljajo v osnovni ali negirani obliki.

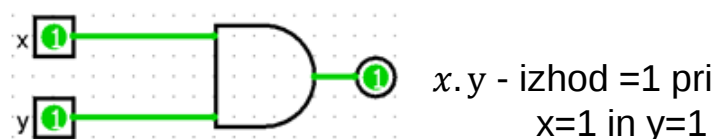
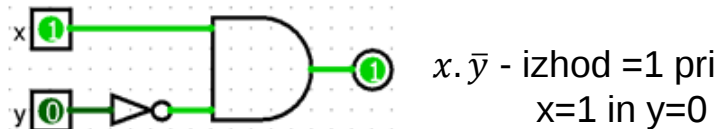
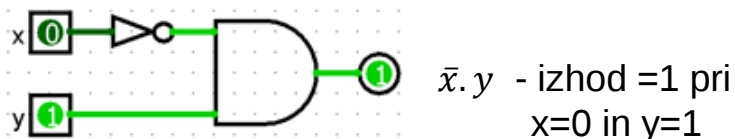
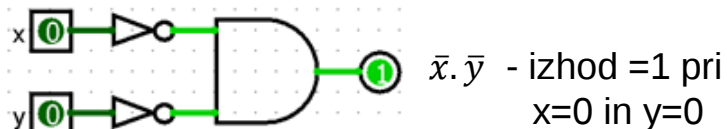
- Pravilnostna tabela vsebuje logično funkcijo $F(x,y)$, ki ima vrednost 1, če je na vhodu $x=0$ in vhodu $y=1$. Kakšno vezje potrebujemo za izvedbo operacije?

x	y	$F(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0



$$F(x, y) = \bar{x} \cdot y$$

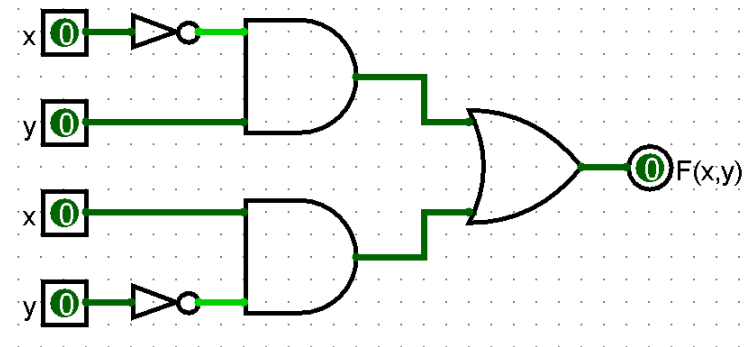
- Kako bomo prišli do vezja za funkcijo, če imamo v tabeli več kot eno enico ?
- Definiramo **zapise konjunkcij (AND)** za vhodne kombinacije spremenljivk x in y .



2. **Z disjunkcijo (OR) povežemo konjunkcije (AND), ki imajo funkcijsko vrednost 1.**

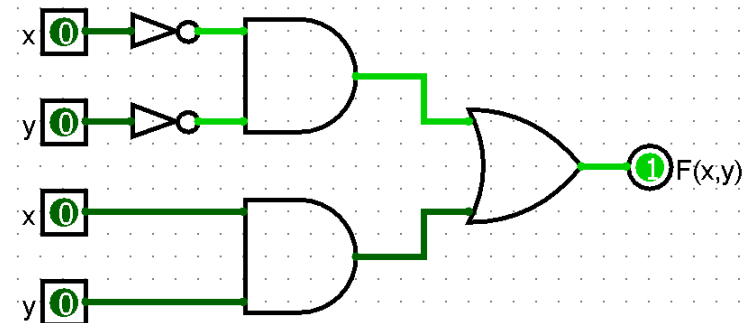
- $F(x,y) = 1$, če sta vhoda x in y različna: $F(x,y) = \bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y}$

x	y	$F(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- $F(x,y) = 1$, če sta vhoda x in y enaka: $F(x,y) = \bar{x} \cdot \bar{y} \vee x \cdot y$

x	y	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



2 Postopek načrtovanja logičnega vezja

❑ Zapis **vsote produktov** (**PDNO** – popolna disjunktivna normalna oblika)

- 1) Analiza problema in zapis pravilnostne tabele za izvedbo funkcij.
- 2) Zapis produktov (konjunkcij) za vse primere, kjer ima funkcija **vrednost 1**.
- 3) Zapis vsote produktov (disjunkcija konjunkcij) za izhodno funkcijo.
- 4) Poenostavitev izhodne funkcije.
- 5) Logična shema vezja za končni zapis.

❑ Zapis **produkta vsot** (**PKNO** – popolna konjunktivna normalna oblika) – redko se uporablja

- 1) Analiza problema in zapis pravilnostne tabele za izvedbo funkcij.
- 2) Zapis vsot (disjunkcij) za vse primere, kjer ima funkcija **vrednost 0**.
- 3) Zapis produkta vsot (konjunkcija disjunkcij) za izhodno funkcijo.
- 4) Poenostavitev izhodne funkcije.
- 5) Logična shema vezja za končni zapis.

2.1 Zapis vsote produktov (PDNO) za funkcijo $f(x,y)$

□ Korak 1)

- Pravilnostna tabela logične funkcije $f = f(x,y)$.

vhodi: x, y

vhodna kombinacija - i

funkcijske vrednosti - f_i

i	x	y	f
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	1

□ Korak 2)

- Zapis **minterma** (m_i)- konjunkcija vhodnih spremenljivk x in y .
- Zapis **produktov** ($m_i \cdot f_i$) – konjunkcija minterma i s funkcijsko vrednostjo i .

i	x	y	f	f_i	m_i	$m_i \cdot f_i$
0	0	0	0	$0 = f_0$	$m_0 = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot f_0$
1	0	1	1	$1 = f_1$	$m_1 = \bar{x} \cdot y$	$\bar{x} \cdot y \cdot f_1$
2	1	0	1	$1 = f_2$	$m_2 = x \cdot \bar{y}$	$x \cdot \bar{y} \cdot f_2$
3	1	1	1	$1 = f_3$	$m_3 = x \cdot y$	$x \cdot y \cdot f_3$

□ Korak 3)

- Zapis **vsote produktov** - disjunktivno povezani konjunktivni izrazi $m_i \cdot f_i$

Splošna enačba: $f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot f_0 \vee \bar{x} \cdot y \cdot f_1 \vee x \cdot \bar{y} \cdot f_2 \vee x \cdot y \cdot f_3 = \sum_{i=0}^3 m_i \cdot f_i$

i	x	y	f	f_i	m_i	$m_i \cdot f_i$
0	0	0	0	$0 = f_0$	$m_0 = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0 = 0$
1	0	1	1	$1 = f_1$	$m_1 = \bar{x} \cdot y$	$\bar{x} \cdot y \cdot 1 = \bar{x} \cdot y$
2	1	0	1	$1 = f_2$	$m_2 = x \cdot \bar{y}$	$x \cdot \bar{y} \cdot 1 = x \cdot \bar{y}$
3	1	1	1	$1 = f_3$	$m_3 = x \cdot y$	$x \cdot y \cdot 1 = x \cdot y$

Vpis poznanih funkcijskih vrednosti in poenostavitev zapisa konstant 0 in 1.

$$f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot 0 \vee \bar{x} \cdot y \cdot 1 \vee x \cdot \bar{y} \cdot 1 \vee x \cdot y \cdot 1 = \bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \vee x \cdot y$$

□ Korak 4)

- Poenostavljanje izhodne funkcije - Booleova algebra

$$f = \bar{x} \cdot y \vee x \cdot \bar{y} \vee x \cdot y = y \vee x \cdot \bar{y} = (y \vee x) \cdot (y \vee \bar{y}) = x \vee y$$

2.2 Zapis vsote produktov (PDNO) za funkcijo $f(x,y,z)$

□ Korak 1), Korak 2), Korak 3)

i	x	y	z	m_i	f	m_i	$m_i \cdot f_i$
0	0	0	0	m_0	0	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot f_0$
1	0	0	1	m_1	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot f_1$
2	0	1	0	m_2	0	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot f_2$
3	0	1	1	m_3	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	$\bar{x} \cdot y \cdot z \cdot f_3$
4	1	0	0	m_4	0	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot f_4$
5	1	0	1	m_5	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	$x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot f_5$
6	1	1	0	m_6	0	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	$x \cdot y \cdot \bar{z} \cdot f_6$
7	1	1	1	m_7	0	$x \cdot y \cdot z$	$x \cdot y \cdot z \cdot f_7$

Splošna enačba:

$$f = m_0 \cdot f_0 \vee m_1 \cdot f_1 \vee m_2 \cdot f_2 \vee m_3 \cdot f_3 \vee m_4 \cdot f_4 \vee m_5 \cdot f_5 \vee m_6 \cdot f_6 \vee m_7 \cdot f_7 = \sum_{i=0}^7 m_i \cdot f_i$$

Vpis poznanih funkcijskih vrednosti in poenostavitv zapisa konstant 0 in 1.

$$\begin{aligned} f &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot 0 \vee \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \cdot 1 \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \cdot 0 \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \cdot 1 \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \cdot 0 \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \cdot 1 \vee x \cdot y \cdot \bar{z} \cdot 0 \vee x \cdot y \cdot z \cdot 0 \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \end{aligned}$$

Primer 1

Zapišite vsoto produktov za funkciji f in g , ki imata skupne vhodne spremenljivke x, y, z ($n=3$).

i	x	y	z	m_i	f	$m_i (f_i=1)$	g	$m_i (g_i=1)$
0	0	0	0	m_0	0		1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
1	0	0	1	m_1	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	0	
2	0	1	0	m_2	0		0	
3	0	1	1	m_3	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$
4	1	0	0	m_4	1	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	1	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
5	1	0	1	m_5	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	0	
6	1	1	0	m_6	0		0	
7	1	1	1	m_7	0		0	

$$f = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot z$$

$$g = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$$

Primer 2

V pravilnostno tabelo zapišite funkciji za liho pariteto (P_L) in sodo (P_S) pariteto in vsoto produktov za obe funkciji.

i	x	y	z	m_i	P_L	$m_i (f_i=1)$	P_S	$m_i (f_i=1)$
0	0	0	0	m_0	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	0	
1	0	0	1	m_1	0		1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$
2	0	1	0	m_2	0		1	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$
3	0	1	1	m_3	1	$\bar{x} \cdot y \cdot z$	0	
4	1	0	0	m_4	0		1	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$
5	1	0	1	m_5	1	$x \cdot \bar{y} \cdot z$	0	
6	1	1	0	m_6	1	$x \cdot y \cdot \bar{z}$	0	
7	1	1	1	m_7	0		1	$x \cdot y \cdot z$

$$P_L = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee \bar{x} \cdot y \cdot z \vee x \cdot \bar{y} \cdot z \vee x \cdot y \cdot \bar{x}$$

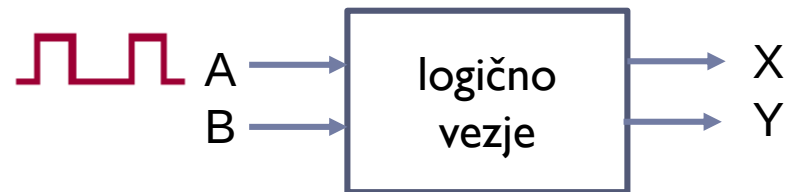
$$P_S = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} \vee x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} \vee x \cdot y \cdot z$$

Kakšna je povezava med funkcijama P_L in P_S ?

Primer 3

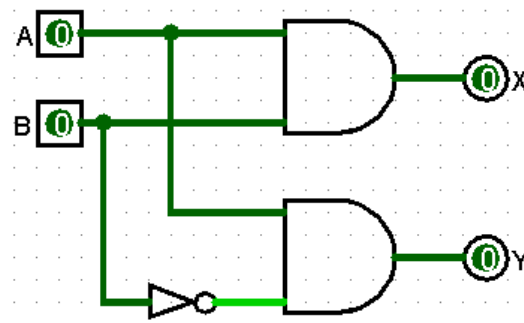
Načrtajte logično vezje z vhodnim signalom A, krmilnim vhodom B in izhodoma X in Y, če deluje na naslednji način:

1. Ko je $B=1$, bo izhod X sledil vhodu A, izhod Y pa bo 0.
2. Ko je $B=0$, bo izhod X enak 0, izhod Y pa bo sledil vhodu A.
3. Sicer sta izhoda enaka 0.



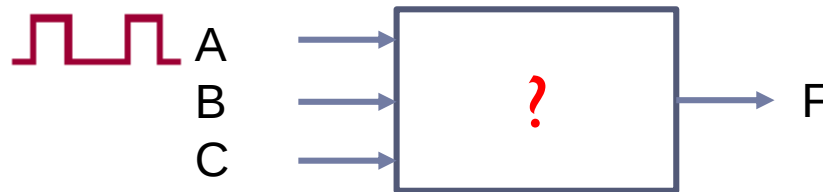
4. Rešitev:

A	B	X	Y
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	0



Primer 4

Zapišite logično funkcijo F pravilnostno tabelo in v PDNO za primer, da periodični signal A preide na izhod F samo takrat, kadar je: a) krmilni vhod $B = \text{LOW}$ in krmilni vhod $C = \text{HIGH}$ in b) krmilna vhod sta $A = B = \text{HIGH}$, v nasprotnem primeru bo izhod ostal LOW .



- ❑ Rešitev: $F = A$, če je $B = 0$ in $C = 1$ in če je $A = B = 1$; sicer je $F = 0$.
- ❑ Pravilnostna tabela:

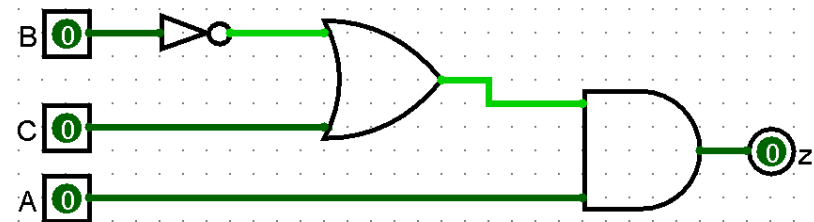
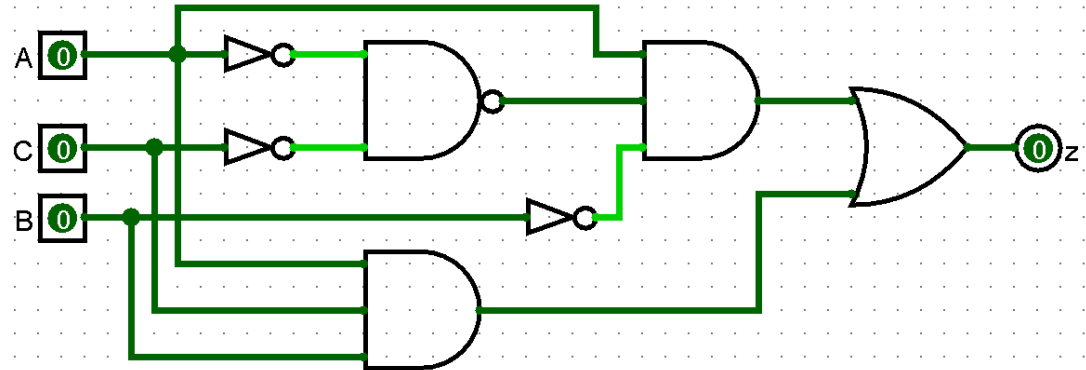
A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- ❑ PDNO: $F = A \cdot \bar{B} \cdot C \vee A \cdot B \cdot C$
 $= A \cdot C \cdot (\bar{B} \vee B) = A \cdot C$

3 Minimizacija logičnih funkcij

□ Booleova algebra – algebraični pristop

$$\begin{aligned} z &= A.B.C \vee A.\bar{B}.(\bar{\bar{A}}.\bar{\bar{C}}) = \\ &= A.B.C \vee A.\bar{B}.(\bar{\bar{A}} \vee \bar{\bar{C}}) = \\ &= A.B.C \vee A.\bar{B}.(A \vee C) = \\ &= A.B.C \vee A.\bar{B}.A \vee A.\bar{B}.C = \\ &= A.B.C \vee A.\bar{B} \vee A.\bar{B}.C = \\ &= A.C.(B \vee \bar{B}) \vee A.\bar{B} = A.C \vee A.\bar{B} = A.(C \vee \bar{B}) \end{aligned}$$



□ Karnaughjev diagram - grafični pristop (v nadaljevanju)

3.1 Karnaughjev diagram

- Karnaughjev diagram: http://en.wikipedia.org/wiki/Karnaugh_map
grafičen prikaz povezave med n vhodi in enim izhodom.

- Pravilnostna tabela: $n=2$

i	x	y	F(x,y)
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	0

- Karnaughjev diagram: $n=2$

	$\bar{y}$	y
$\bar{x}$	0	1
x	2	3

	$\bar{y}$	y
$\bar{x}$		1
x	1	

		y	
		0	1
x	0		1
	1	1	

■ Pravilnostna tabela: $n=3$

i	x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Karnaughjev diagram: $n=3$

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$	0	1
$\bar{x} y$	2	3
$x y$	6	7
$x \bar{y}$	4	5

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$		1
$\bar{x} y$	1	1
$x y$		1
$x \bar{y}$		

$x \ y \backslash z$	0	1
00		1
01	1	1
11		1
10		

■ Pravilnostna tabela: n=4

i	A	B	C	D	F(A,B,C,D)
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Karnaughjev diagram: n=4

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}.B$	4	5	7	6
$A.B$	12	13	15	14
$A.\bar{B}$	8	9	11	10

	$\bar{C}.\bar{D}$	$\bar{C}.D$	$C.D$	$C.\bar{D}$
$\bar{A}.\bar{B}$			1	1
$\bar{A}.B$		1	1	1
$A.B$				
$A.\bar{B}$	1	1		

Primer

- Zapis logične funkcije $F(x, y, z)$ in negirane funkcije $\overline{F(x, y, z)}$ v Karnaughjevem diagramu

i	x	y	z	$F(x, y, z)$	$\overline{F(x, y, z)}$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1
3	0	1	1	1	0
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	0

$F(x, y, z) \rightarrow f_i = 0$
vhodne kombinacije,
kjer ima funkcija
vrednost 0

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$		0
$\bar{x} y$	0	
$x y$	0	
$x \bar{y}$	0	0

$F(x, y, z) \rightarrow f_i = 1$
vhodne kombinacije,
kjer ima funkcija
vrednost 1

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$	1	
$\bar{x} y$		1
$x y$		1
$x \bar{y}$		

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$		1
$\bar{x} y$	1	
$x y$	1	
$x \bar{y}$	1	1

3.2 Pravilo sosednosti

- združevanje dveh konjunktivnih izrazov, ki se razlikujeta v eni spremenljivki za negacijo in nenegacijo ($x, \bar{x}$), v vseh ostalih spremenljivkah sta enaka.
- sosednost konjunkcij dolžine $k = n, n-1, n-2, \dots$, za funkcijo, ki je odvisna od n spremenljivk.

sosednost v pravilnostni tabeli ($k=3$)

i	A	B	C	
0	0	0	0	}
1	0	0	1	
2	0	1	0	}
3	0	1	1	
4	1	0	0	}
5	1	0	1	
6	1	1	0	}
7	1	1	1	

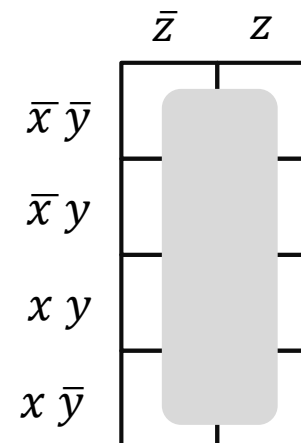
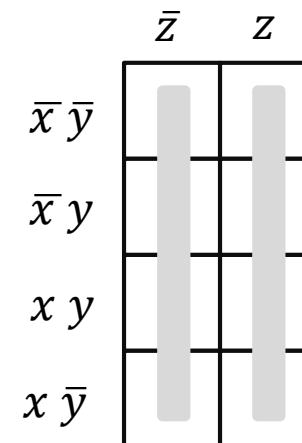
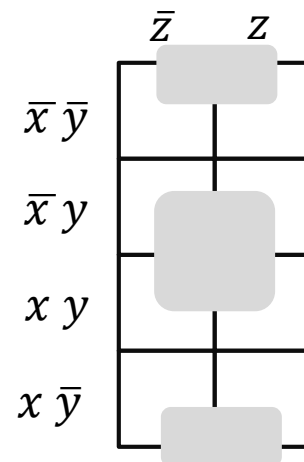
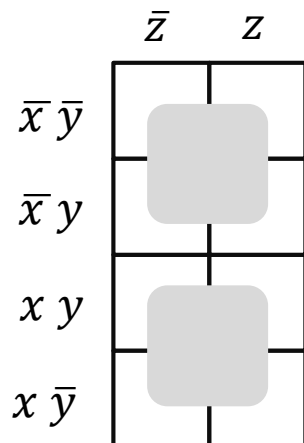
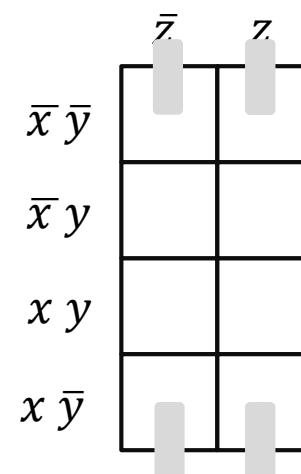
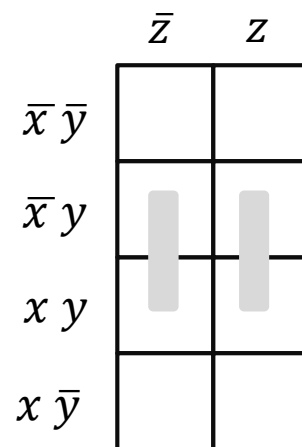
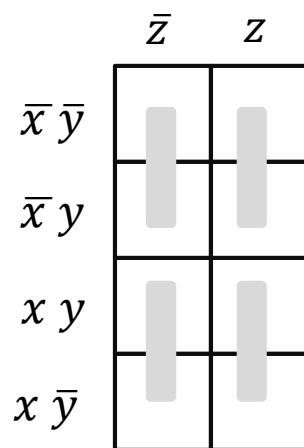
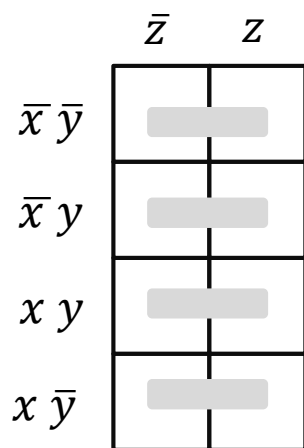
$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \vee A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

...

sosednost v Karnaughjevem diagramu (n=3)



Primer 1

a) sosednost v algebraični enačbi (Booleova algebra: distributivnost, komplement)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.z \vee x.y.z = \\ &\bar{x}.\bar{y}.(\bar{z} \vee z) \vee y.z.(\bar{x} \vee x) = \\ &\bar{x}.\bar{y} \vee y.z \end{aligned}$$

b) sosednost v Karnaughjevem diagramu (k=n=3)

	$\bar{z}$	z	
$\bar{x} \bar{y}$	1	1	$\bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.\bar{y}.z =$ $\bar{x}.\bar{y}.(\bar{z} \vee z) =$ $\bar{x}.\bar{y}$
$\bar{x} y$		1	
$x y$		1	$\bar{x}.y.z \vee x.y.z =$ $(\bar{x} \vee x).y.z =$ $y.z$
$x \bar{y}$			

$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y} \vee y.z$$

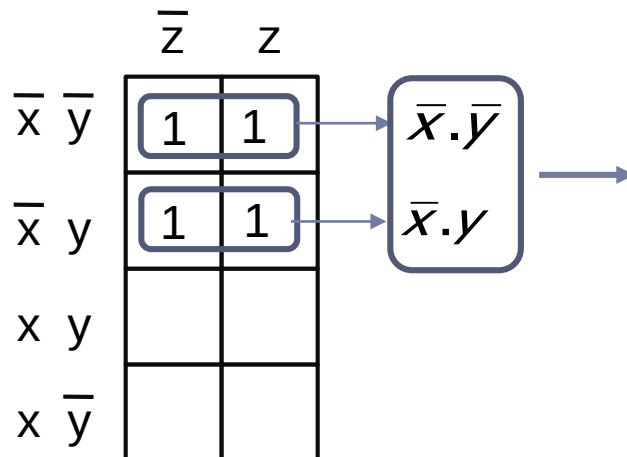
Primer 2

a) sosednost v algebraični enačbi (Booleova algebra: distributivnost, komplement)

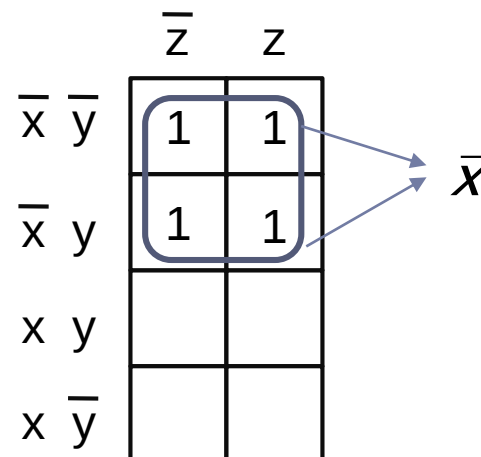
$$\begin{aligned} \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.\bar{y}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} \vee \bar{x}.y.z &= \\ \bar{x}.\bar{y}.(\bar{z} \vee z) \vee \bar{x}.y.(\bar{z} \vee z) &= \\ \bar{x}.\bar{y} \vee \bar{x}.y &= \bar{x}.(\bar{y} \vee y) = \bar{x} \end{aligned}$$

b) sosednost v Karnaughjevem diagramu

združevanje za $k = n=3$



združevanje za $k = n-1=2$



Primer 3

□ $n=4$, sosednost - združevanje dveh enic ($k=n=4$)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$		1	1	
$\bar{A}B$			1	
AB			1	
$A\bar{B}$	1			1

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1			1
$\bar{A}B$				
AB				
$A\bar{B}$				1

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

□ $n=4$, sosednost - združevanje štirih enic ($k=n-1=3$)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$				
$\bar{A}B$			1	1
AB			1	1
$A\bar{B}$				

Sosednost ($k=3$)

$$(7,15): \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D \vee A \cdot B \cdot C \cdot D = B \cdot C \cdot D$$

$$(6,14): \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} \vee A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} = B \cdot C \cdot \bar{D}$$

Združitev:

$$B \cdot C \cdot D \vee B \cdot C \cdot \bar{D} = B \cdot C$$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

- $n=4$, sosednost - združevanje štirih enic ($k=n-1=3$)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	1			1
$\bar{A}B$		1	1	
AB		1	1	
$A\bar{B}$	1			1

Sosednost:

?

Združitev:

?

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	10	11

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	10	11

- $n=4$, sosednost za združevanje osem enic ($k=n-2=2$)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	I			I
$\bar{A}B$	I			I
AB	I			I
$A\bar{B}$	I			I

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	I			I
$\bar{A}B$	I			I
AB	I			I
$A\bar{B}$	I			I

Sosednost

Združitev: $\bar{D}$

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$	0	1	3	2
$\bar{A}B$	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
$A\bar{B}$	8	9	11	10

3.3 Minimalna oblika **vsote produktov** ali **MDNO**

□ Minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO):

- Zapis logične funkcije $f(x,y,z)$ z najmanjšim številom logičnih vrat in povezav, tako da je vsaka funkcijska vrednost $f_i = 1$ upoštevana vsaj enkrat (pravilo sosednosti).

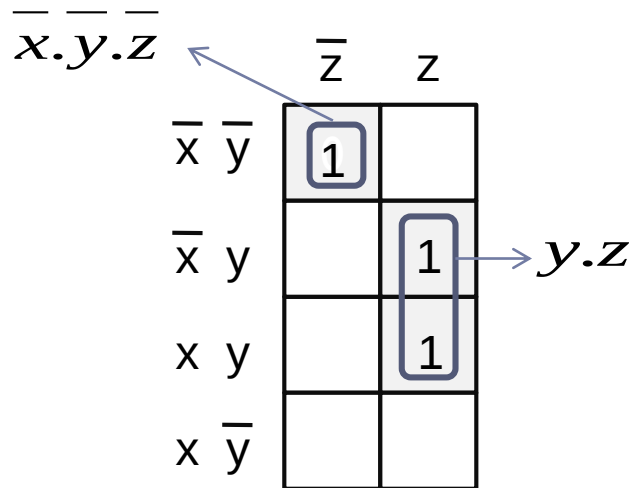
x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f(x, y, z) =$$

$$= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee \bar{x}.y.z \vee x.y.z =$$

$$= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee y.z(\bar{x} \vee x) =$$

$$= \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee y.z$$



$$f(x, y, z) = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee y.z$$

Primer:

	A	B	C	D	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

□ V tabeli je podana funkcija $f = f(A,B,C,D)$

□ Vpis funkcije v Karnaughjev diagram ($f_i = 1$)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$		1		
$\bar{A}B$		1	1	1
AB		1	1	1
$A\bar{B}$			1	1

□ Minimizacija - združevanje in zapis krajših konjunkcij

- Združevanje enic tako, da je vsaka enica upoštevana vsaj enkrat (pravilo sosednosti).
- Disjunktivna povezava konjunktivnih izrazov.

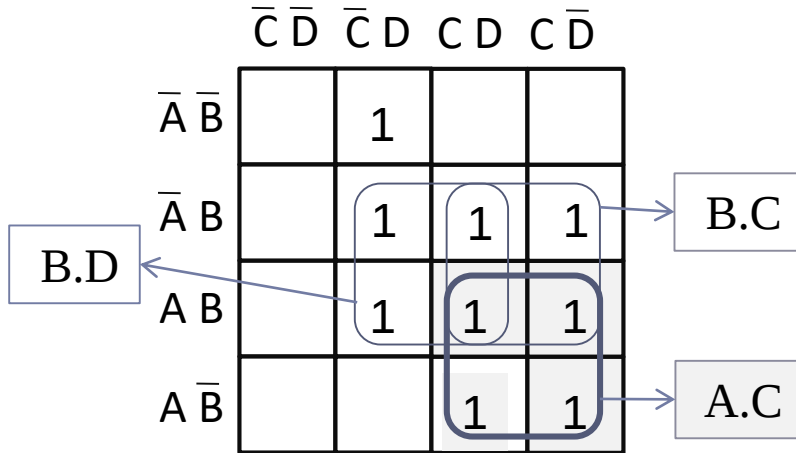
a)

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$		1		
$\bar{A}B$		1	1	1
AB		1	1	1
$A\bar{B}$			1	1

A blue box labeled **B.D** has an arrow pointing to the cell at row $\bar{A}B$, column $\bar{C}D$. A blue rounded rectangle encloses the cells at rows $\bar{A}B$ and AB , and columns $\bar{C}D$ and CD .

	$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$\bar{A}\bar{B}$		1		
$\bar{A}B$		1	1	1
AB		1	1	1
$A\bar{B}$			1	1

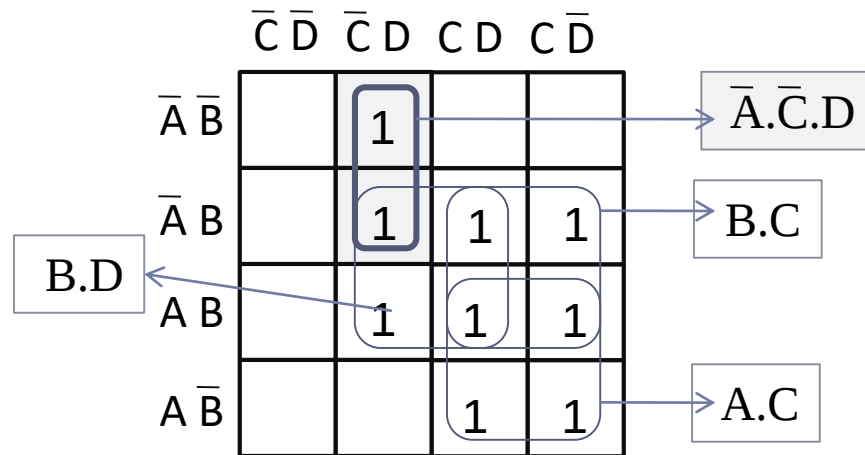
A blue box labeled **B.D** has an arrow pointing to the cell at row AB , column $\bar{C}D$. A blue rounded rectangle encloses the cells at rows $\bar{A}B$ and AB , and columns $\bar{C}D$ and CD . A blue box labeled **B.C** has an arrow pointing to the cell at row $\bar{A}B$, column CD .



b)

MDNO:

$$f(A, B, C, D) = B.D \vee B.C \vee A.C \vee \bar{A}.\bar{C}.D$$



3.4 Minimalna oblika **produkta vsot** ali **MKNO**

□ Minimalna konjunktivna normalna oblika (MKNO):

1. Minimiziramo negirano funkcijo $\bar{f} \rightarrow f_i = 0$
2. Zapišemo MDNO negirane funkcije
3. Levo in desno stran enačbe negiramo
4. Po DeMorganovem izreku pretvorimo desno stran in dobimo MKNO.

$f(A, B, C, D) - f_i = 1$ negirana funkcija $\overline{f(A, B, C, D)}$ ima $f_i = 1$ tam, kjer je $f(A, B, C, D)$ imela $f_i = 0$

$f(A, B, C, D)$	$\bar{C} \bar{D}$	$\bar{C} D$	$C D$	$C \bar{D}$
$\bar{A} \bar{B}$		1		
$\bar{A} B$		1	1	1
$A B$		1	1	1
$A \bar{B}$			1	1

1.

$\overline{f(A, B, C, D)}$

$\overline{C} \cdot \overline{D}$

$\overline{A} \overline{B}$

$\overline{A} B$

$A B$

$A \overline{B}$

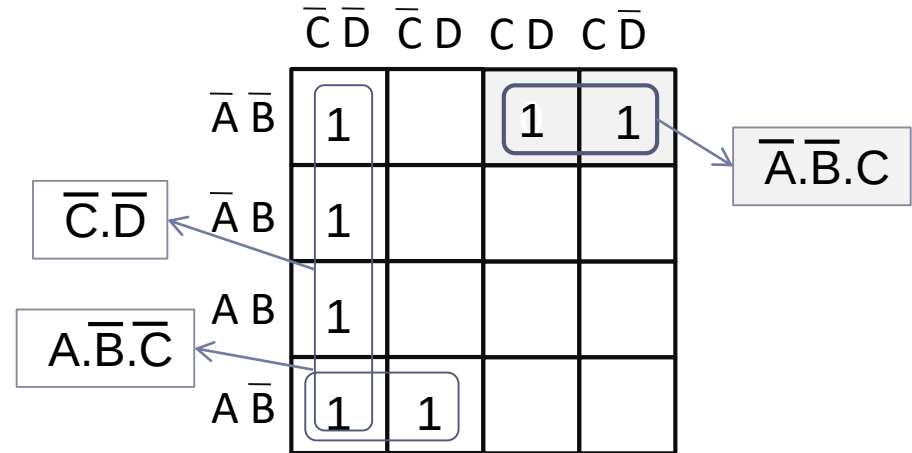
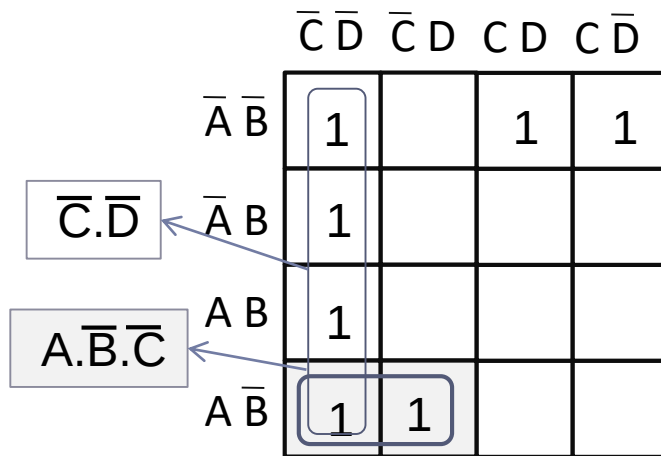
$\overline{C} \overline{D}$

$\overline{C} D$

$C D$

$C \overline{D}$

1			1	1
1				
1				
1	1			



2. $\bar{f}(A, B, C, D) = \bar{C}.\bar{D} \vee A.\bar{B}.\bar{C} \vee \bar{A}.\bar{B}.C$

3. $\bar{\bar{f}}(A, B, C, D) = \overline{\bar{C}.\bar{D} \vee A.\bar{B}.\bar{C} \vee \bar{A}.\bar{B}.C}$

4. $f(A, B, C, D) = (C \vee D).(\bar{A} \vee B \vee C).(A \vee B \vee \bar{C})$

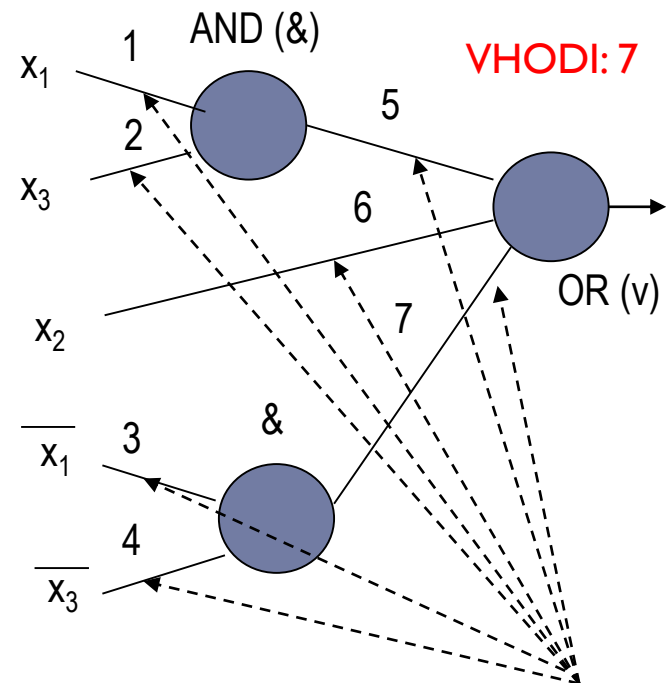
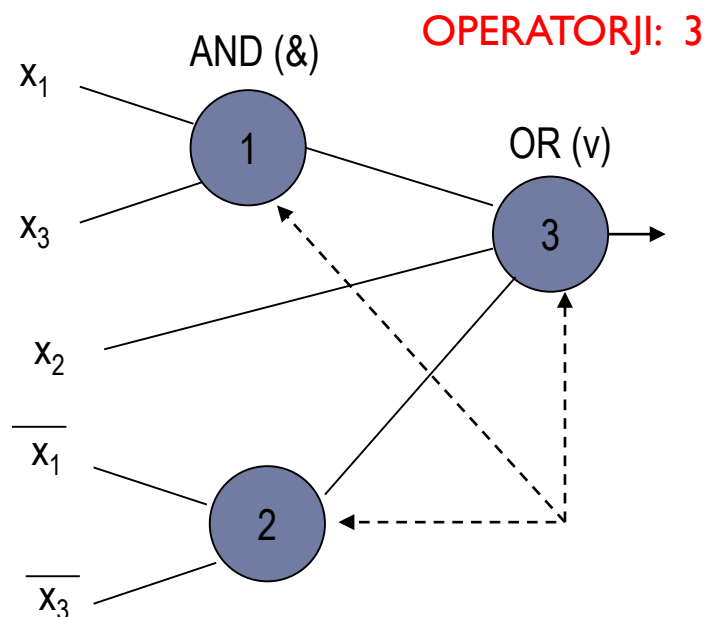
MKNO

3.5 Minimalna normalna oblika (MNO)

1. Poiščemo MDNO in MKNO
2. Določimo: **[Število operatorjev / število vhodov]**

MNO dobimo tako, da izberemo enostavnejšo obliko logične funkcije glede na operatorje in nato glede na vhode, če je število enih ali drugih različno.

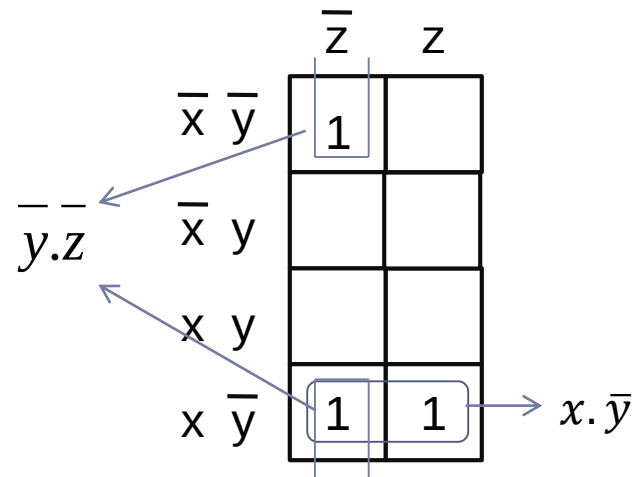
Primer izračuna za MDNO: $f_{\text{MDNO}}(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3}$ **[3,7]**



Primer: Zapis funkcije v PDNO, MDNO, MKNO, MNO

- ❑ V tabeli je podana logična funkcija $f = f(x,y,z)$
- ❑ Zapis vsote produktov - PDNO
- ❑ Poenostavitev vsote produktov - MDNO
 - Karnaughjev diagram

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



$$f = \bar{y}.z \vee x.\bar{y}$$

$$f = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z} \vee x.\bar{y}.\bar{z} \vee x.\bar{y}.z$$

❑ Poenostavitev produkta vsot – MKNO

1. Za podano funkcijo zapišemo njeno negacijo v Karnaughjev diagram

$$f(x, y, z)$$

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$	1	
$\bar{x} y$		
$x y$		
$x \bar{y}$	1	1

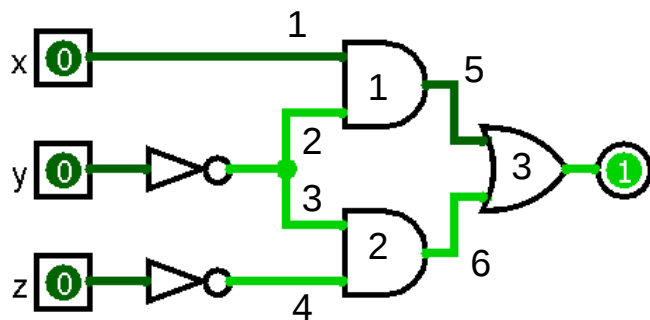
$$\overline{f(x, y, z)}$$

	$\bar{z}$	z	
$\bar{x} \bar{y}$		1	$\rightarrow \bar{x} \cdot z$
$\bar{x} y$	1	1	
$x y$	1	1	$\rightarrow y$
$x \bar{y}$			

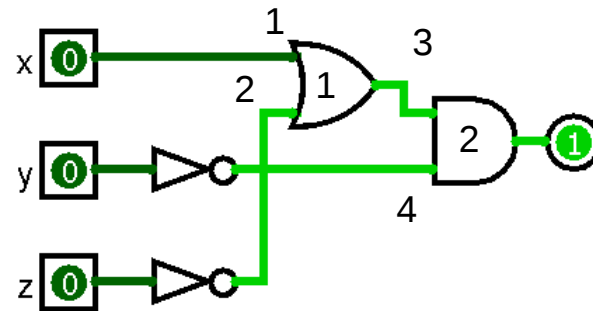
2. Poiščemo minimalno obliko $\overline{f(x, y, z)} = y \vee \bar{x} \cdot z$
3. Določimo MKNO iz $\overline{f(x, y, z)} = y \vee \bar{x} \cdot z$ (negiramo levo in desno stran)

$$\overline{\overline{f(x, y, z)}} = \overline{y \vee \bar{x} \cdot z} \rightarrow f(x, y, z) = \bar{y} \cdot (x \vee \bar{z})$$

- Minimalna normalna oblika – MNO (Negatorjev ne upoštevamo, ker predpostavljamo, da imamo za vse potrebne spremenljivke obe vrednosti)



MDNO: 3, 6



MKNO: 2, 4

- Število vrat, število operatorjev (MDNO: [3,6]; MKNO: [2,4])
- MNO = MKNO

3.5 Nepopolne logične funkcije

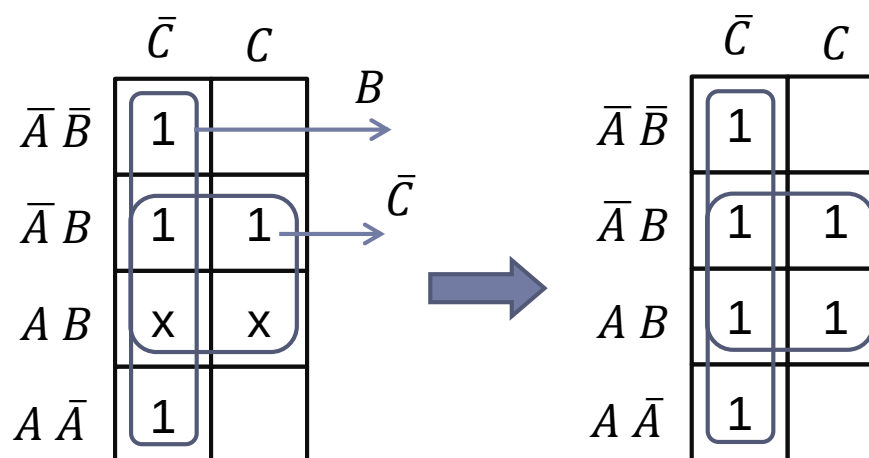
- ❑ Logična funkcija je podana z izhodom, ki lahko zavzame:
 - vrednosti 0, 1 ali
 - nedoločeno vrednost (x) pri eni ali več vhodnih kombinacijah.
- ❑ Nedoločena vrednost (x) – vrednost izhoda ni vnaprej podana, zato lahko pri načrtovanju ima vrednost 0 ali 1.
- ❑ Logično funkcijo imenujemo:
 - nepopolna logična funkcija
 - funkcija z redundancami.
- ❑ V tabeli je podana logična funkcija $f(A,B,C)$,
 - funkcijski vrednosti f_6 in f_7 sta x (0 ali 1).
 - vhodni kombinaciji 110 in 111 lahko
 - imata izhod 0 ali 1 (x: 0,1)

i	A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	X
7	1	1	1	X

□ Minimizacija nepopolne logične funkcije

- minterme, ki imajo nedoločeno vrednost (x), uporabimo pri združevanju na osnovi sosednosti samo v primeru, ko omogočajo enostavnejšo obliko logične funkcije.

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	X



redundanci združimo z enicami in dobimo $\bar{C}$.

$$F(A, B, C) = B \vee \bar{C}$$

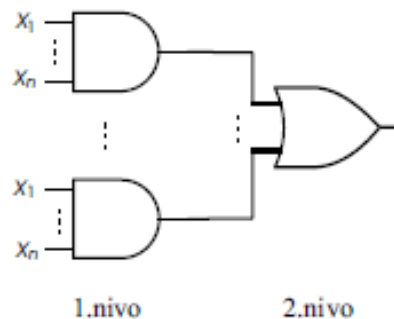
- V logičnem vezju ima logična funkcija $F(A, B, C)$ na izhodu 1 za f_6 in f_7 .

Povzetek

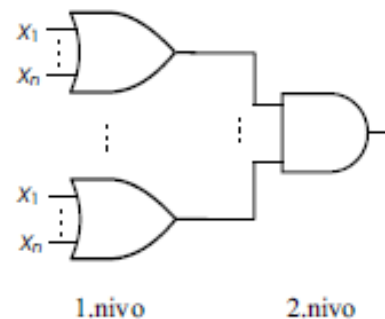
- ❑ Konstanti 0,1
- ❑ Spremenljivke, ki zavzamejo vrednosti 0 ali 1: $x, y, z, A, \dots$ ($x \in \{0,1\}, \dots$)
- ❑ Funkcije, ki dobijo vrednosti 0 ali 1: $f, g, h, \dots$ ($f \in \{0,1\}, \dots$)
- ❑ Vsaka spremenljivka ima svoj **komplement ali negacijo**: $x, \bar{x}$
- ❑ **Pravilnostna tabela** za funkcijo z n spremenljivkami: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - 2^n vrstic ali **vhodnih kombinacij** $w_i, i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$
 - vsaki vrstici pripada ena funkcijska vrednost: $w_i \rightarrow f(w_i) = f_i \in \{0,1\}$
- ❑ **Minterm** – konjunkcija vseh vhodov podane funkcije
- ❑ **Maksterm** - disjunkcija vseh vhodov podane funkcije
- ❑ **Vsota produktov** ali disjunkcija konjunkcij (PDNO): $x.y \vee x.z$
- ❑ **Produkt vsot** ali konjunkcija disjunkcij (PKNO): $(x \vee y). (x \vee z)$
- ❑ **Sosednost** – združevanje konjunkcij: $x.\bar{y} \vee x.y = x$
- ❑ Nepopolne logične funkcije

- ❑ Tabelarni zapis (pravilnostna tabela)
- ❑ Analitični zapis
 - **Normalna oblika:** največ dva nivoja logičnih operatorjev (1 ali 2 nivojska funkcija)
 - **Popolna oblika:** v 1.nivo vstopajo vse vhodne spremenljivke

Popolna disjunktivna normalna oblika



Popolna konjunktivna normalna oblika



- **Minimalna oblika:** najkrajša možna oblika zapisa funkcije (število operatorjev/vrat in vhodov vanje)
- ❑ Grafičen zapis: Karnaughjev diagram
- ❑ Logična shema (povezava logičnih vrat, elementov, gradnikov)

Naloga 1

Podani sta funkciji F in G:

$F=1$, če sta vhoda $A=1$ in $B=0$ in če sta vhoda $A=0$ in $C=1$

$F=0$, sicer

$G=1$, če sta po dva vhoda enaka 1 in če so vsi trije vhodi 0

$G=0$, sicer

□ Naloge

- Zapišite $F(A,B,C)$ in $G(A,B,C)$
v pravilnostno tabelo
- Zapišite PDNO za F in G

A	B	C	F	G
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

Naloga 2

- Zapis funkcije v MDNO, MKNO in določitev MNO

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$$f(x, y, z) = \bar{x}.y \vee \bar{y}.\bar{z}$$

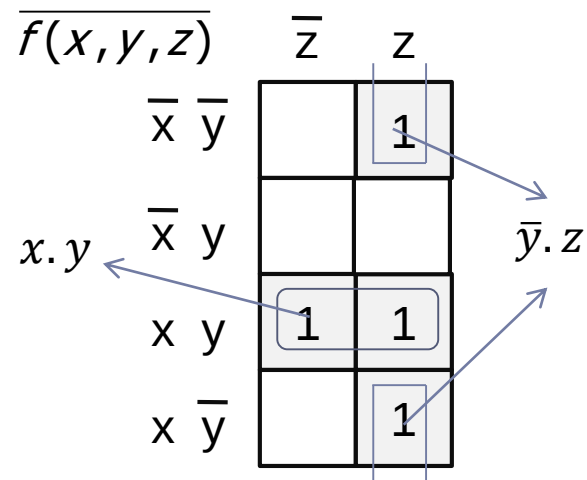
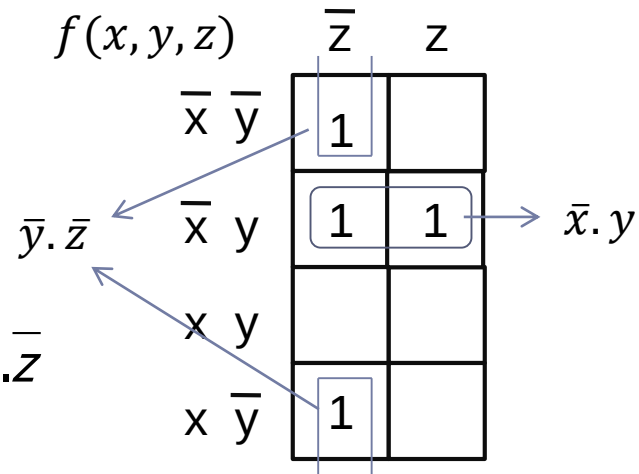
MDNO: [3, 6]

$$\bar{f} = x.y \vee \bar{y}.z$$

$$\bar{\bar{f}} = \overline{x.y \vee \bar{y}.z}$$

$$f = (\bar{x} \vee \bar{y}).(y \vee \bar{z})$$

MKNO: [3, 6]



MNO=MDNO=MKNO [3,6]

Naloga 3

□ Funkcija je podana v pravilnostni tabeli.

- Zapis funkcije $f(x,y,z)$ v **MDNO**
- Zapis MDNO z operatorji **NAND** in **NOR**

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$		
$\bar{x} y$		1
$x y$	1	1
$x \bar{y}$	1	1

MDNO

$$f(x, y, z) = x \vee y \cdot z$$

NAND

$$\bar{\bar{f}} = \bar{\bar{x \vee y \cdot z}} = \overline{\bar{x} \cdot \overline{y \cdot z}} = \bar{x} \uparrow (\overline{y \cdot z}) = \bar{x} \uparrow (y \uparrow z)$$

NOR

$$\bar{\bar{f}} = \bar{\bar{x \vee yz}} = \overline{\bar{x} \downarrow \overline{yz}} = \bar{x} \downarrow (\overline{\bar{y} \vee \bar{z}}) = \bar{x} \downarrow (\bar{y} \downarrow \bar{z})$$

Naloga 4

- ❑ Funkcija je podana v pravilnostni tabeli.
 - ❑ Zapišite funkcijo $f(x,y,z)$ v **MKNO**
 - ❑ Zapišite MKNO z operatorji **NOR** in **NAND**.

x	y	z	f	$\bar{f}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

	$\bar{z}$	z
$\bar{x} \bar{y}$	1	1
$\bar{x} y$	1	
x y		
x $\bar{y}$		

MKNO

$$\bar{f} = \bar{x}.\bar{z} \vee \bar{x}.\bar{y}$$

$$\bar{f} = \overline{\bar{x}.\bar{z} \vee \bar{x}.\bar{y}}$$

$$f = (\bar{x}.\bar{z}).(\bar{x}.\bar{y}) = (x \vee z)(x \vee y)$$

NOR

$$\bar{f} = \overline{(x \vee z)(x \vee y)} = \overline{(x \vee z)} \vee \overline{(x \vee y)} = (x \downarrow z) \downarrow (x \downarrow y)$$

NAND

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \overline{(x \vee z)(x \vee y)} = \overline{(x \vee z)} \uparrow \overline{(x \vee y)} = \overline{\overline{\overline{(x \vee z)}}} \uparrow \overline{\overline{\overline{(x \vee y)}}} = \\ &= \overline{(\bar{x}.\bar{z})} \uparrow \overline{(\bar{x}.\bar{y})} = \overline{(\bar{x} \uparrow \bar{z})} \uparrow \overline{(\bar{x} \uparrow \bar{y})} \end{aligned}$$

Naloga 5

Za vhoda $X = (x_1, x_0)$ in $Y = (y_1, y_0)$ sta v minimalni obliki podani funkciji p_1 in p_0 .

$$p_1 = x_1 \cdot \overline{y_1} \vee x_1 \cdot x_0 \cdot \overline{y_0} \vee x_0 \cdot \overline{y_1} \cdot \overline{y_0}$$

$$p_0 = \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} \cdot y_0 \vee \overline{x_1} \cdot y_1 \vee \overline{x_0} \cdot y_1 \cdot y_0$$

Naloga:

1. Zapišite izhoda p_1 in p_0 v pravilnostni tabeli.
2. Definirajte kakšna je operacija primerjave ($<$, $>$, $=$) za $X = (x_1, x_0)$ in $Y = (y_1, y_0)$.

p_1	p_0	Primerjava
0	0	$X = Y$
0	1	$X < Y$
1	0	$X > Y$

x_1	x_0	y_1	y_0	p_1	p_0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Naloga 6:

Načrtajte logično vezje, ki krmili vrata dvigala za tri-nadstropja. Na voljo so štirje vhodi, ki določajo kdaj se dvigalo premika ($M=1$) ali ustavi ($M=0$). Signale $F1$, $F2$ in $F3$ so talni indikatorji, ki so vedno LOW in gredo v HIGH takrat, ko je dvigalo v nivoju tega nadstropja (primer: ko je dvigalo poravnano z drugim nadstropjem so $F2=1$, $F1=F3=0$). Izhod vezja je signal ODPRTO, ki je vedno LOW in se spremeni v HIGH, ko se bodo odprla vrata dvigala.

1. Blok shema



2. Pravilnostna tabela

3. Minimizacija

4. Logično vezje

Rešitev

i	M	F1	F2	F3	ODPRTO
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	x
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	x
6	0	1	1	0	x
7	0	1	1	1	x
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

	$\overline{F2}.\overline{F3}$	$\overline{F2}.F3$	$F2.\overline{F3}$	
$\overline{M}.F1$		1	x	1
$\overline{M}.F1$	1	x	x	x
$M.F1$				
$M.\overline{F1}$				

$$\begin{aligned}\text{ODPRTO} &= \overline{M}.F1 \vee \overline{M}.F3 \vee \overline{M}.F2 \\ &= \overline{M}.(F1 \vee F2 \vee F3)\end{aligned}$$

