

1. Katere od spodaj naštetih preslikav med vektorskimi prostori so linearne? Za tiste, ki so linearne, poišči še matrike, ki jim pripadajo v standardnih bazah.

(a) $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\eta([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]^T$,

(b) $\theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 x_2, x_2 x_3]^T$,

(c) $\xi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi([x_1, x_2, x_3]^T) = [x_1 + 1, x_2 + 2]^T$,

Rešitev: (a) Je, $A_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b,c) Nista.

2. Naj bo A matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ima predpis $\phi(\mathbf{x}) = A^T \mathbf{x} - 2\mathbf{x}$.

- (a) Preveri, da je ϕ linearna.
 (b) Poišči matriko, ki pripada ϕ v standardni bazi $\mathbb{R}^2$.
 (c) Poišči bazo za $\ker \phi$.

Rešitev: (b) $A_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $B_{\ker \phi} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

3. Naj bo $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T \in \mathbb{R}^3$ neničeln vektor. Preslikava $\eta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dana s predpisom $\eta(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

- (a) Prepričaj se, da je η linearna preslikava.
 (b) Poišči matriko, ki pripada η v standardni bazi $\mathbb{R}^3$.
 (c) Poišči bazi za $\ker \eta$ in $\operatorname{im} \eta$. Če ne gre v splošnem, pa vsaj za $\mathbf{a} = [1, 1, 1]^T$.

Rešitev: (b) $A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$. (c) Za $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ je $B_{\ker \eta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $B_{\operatorname{im} \eta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. V $\mathbb{R}^3$ so dani vektorji $\mathbf{a} = [1, 1, 0]^T$, $\mathbf{b} = [1, 0, 1]^T$ in $\mathbf{c} = [0, 1, 1]^T$ ter linearna preslikava $\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\mathcal{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}, \quad \mathcal{F}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{ter} \quad \mathcal{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{c}.$$

- (a) Pokaži, da je $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.
 (b) Zapiši matriko preslikave $\mathcal{F}$ v standardni bazi $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
 (c) Kam $\mathcal{F}$ preslika vektor $[1, 1, 1]^T$?
 (d) Kaj je $\ker \mathcal{F}$? Ali je $\mathcal{F}$ bijekcija?

Rešitev: (b) $A_{\mathcal{F}, S, S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (c) $\mathcal{F} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (d) $\ker \mathcal{F} = \{\mathbf{0}\}$ in $\mathcal{F}$ je bijekcija.