

1. Naj bo  $W \leq \mathbb{R}^4$  vektorski podprostor vseh vektorjev  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ , za katere velja  $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ .

- (a) Preveri, da sta vektorja  $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 0]^T$  in  $\mathbf{v} = [1, 1, 3, 3]^T$  vsebovana v  $W$ .
- (b) Dopolni množico  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  do baze za  $W$  (če je to potrebno).
- (c) Poišči matriki  $A$  in  $B$ , da bo  $W = C(A) = N(B)$ .
- (d) Ali obstaja  $4 \times 4$  matrika  $A$ , da je  $W = C(A) = N(A)$ ?

Rešitev: (b) Dodamo npr.  $\mathbf{w} = [1, 0, 0, 1]^T$ . (c)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = [1, -1, 1, -1]$ . (d) Ne.

2. Naj bo  $W \leq \mathbb{R}^4$  linearna ogrinjača vektorjev iz množice

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\},$$

tj.  $W = \mathcal{L}(L)$ . Naj bo  $\mathbf{v} = [-2, 2, -6, 2]^T$ .

- (a) Zapiši vektor  $\mathbf{v}$  kot linearno kombinacijo vektorjev iz  $L$ . Lahko to storimo na več načinov?
- (b) Opiši vse linearne kombinacije vektorjev iz  $L$ , ki so enake  $\mathbf{0}$ .
- (c) Utemelji: Če iz  $L$  odstranimo en (katerikoli) vektor, dobimo linearno neodvisno množico vektorjev.
- (d) Poišči bazo za  $W$ .

Rešitev: Naj bodo  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$  po vrsti vektorji iz  $L$ . (a)  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ . Da, lahko.

(b)  $\alpha\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3 + \alpha\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ . (c) To postane jasno po Gaussovi eliminaciji.

(d)  $B_W = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ .

3. Dani so vektorji

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

- (a) Iz tega nabora vektorjev izberi največji možen nabor linearno neodvisnih vektorjev.
- (b) Ali izbran nabor vektorjev predstavlja bazo prostora  $\mathbb{R}^4$ ?
- (c) Kako bi ostale vektorje izrazil kot linearne kombinacije prej izbranih?

Rešitev: (a) Recimo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$ . (b) Da. (c)  $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w} = 7\mathbf{v} - 2\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

4. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Poišči bazi ničelnih prostorov  $N(A)$  in  $N(B)$  matrik  $A$  in  $B$ . Ali velja  $N(A) = N(B)$ ?

(b) Prepričaj se, da sta stolpčna prostora  $C(A)$  in  $C(B)$  enaka.

Rešitev: (a) Npr.  $B_{N(A)} = \{[-2, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(B)} = \{[1, -1, -2]^T\}$ .  $N(A) \neq N(B)$ .

(b) Uporabimo Gaussovo eliminacijo na  $[A \mid B]$  ter  $[B \mid A]$ .

5. Dani so matrika  $K$  ter vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$ :

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Ali sta vektorja  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  vsebovana v  $N(K)$ ? ... v  $C(K)$ ?

(b) Poišči baze in določi dimenzije podprostorov  $N(K)$ ,  $C(K)$ ,  $N(K) \cap C(K)$  ter  $N(K) + C(K)$ .

V (b) je vsota vektorskih podprostorov  $U, V \leq W$ , vektorski podprostor  $U + V \leq W$ , v katerem so vse možne vsote vektorjev iz  $U$  in  $V$ , tj.  $U + V := \{u + v : u \in U \text{ in } v \in V\}$ . Preveriš lahko, da velja  $U + V = \mathcal{L}(U \cup V)$ , in s tem hkrati potrdiš, da je  $U + V$  vektorski podprostor.

Rešitev: (a)  $\mathbf{a} \in N(K)$ ,  $\mathbf{b} \notin N(K)$ .  $\mathbf{a} \in C(K)$ ,  $\mathbf{b} \in C(K)$ .

(b)  $B_{N(K)} = \{[1, 1, 1, 0]^T, [-1, 0, 0, 1]^T\}$ ,  $B_{C(K)} = \{[1, 1, 2, 2]^T, [1, 0, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(K) \cap C(K)} = \{[0, 1, 1, 1]^T\}$ ,  $B_{N(K) + C(K)} = \{[1, 1, 1, 0]^T, [-1, 0, 0, 1]^T, [1, 0, 1, 1]^T\}$ .