4. izpit iz teorije iz Osnov matematične analize

30. 8. 2022

Ime in priimek: Vpisna številka:

Prvi sklop

Pri naslednjih nalogah obkroži le **en** odgovor. Pravilen odgovor pri vsaki nalogi prinese 3 točke, napačen pa -1 točko. Neodgovorjena naloga (ali prečrtan odgovor) prinese 0 točk.

1. Nedoločeni integral funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ je

   (a) $\arctan x + C$,

   (b) $\arcsin x + C$,

   (c) $\ln(1 + x^2) + C$,

   (d) $\frac{1}{2}\ln(1 + x) + \frac{1}{2}\ln(1 - x) + C$.

   Rešitev: Odgovor (a).

2. Katera od spodaj naštetih funkcij $f(x, y)$ ima parcialna odvoda $f_x = x^2 + y^2$ in $f_y = 2xy$?

   (a) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$

   (b) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3}$

   (c) $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + xy^2$

   (d) $f(x, y) = \frac{y^3}{3} + x^2y$

   Rešitev: Vsako od naštetih funkcij parcialno odvajamo. Pravi odgovor je (c).

3. $(1.01 + i)^5$ je približno enako

   (a) $4.2 + 4i$,

   (b) $-4.2 - 4i$,

   (c) $0.4 + 0.3i$,

   (d) $-0.4 - 0.3i$.

   Rešitev: Število $1.01 + i$ ima absolutno vrednost približno $\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ in argument približno $\frac{\pi}{4}$. Ko število potenciramo, dobimo absolutno vrednost približno $\sqrt{2}^5$ in argument približno $\frac{5\pi}{4}$. Število $(1.01 + i)^5$ torej leži v 3. kvadrantu. Ker je absolutna vrednost večja kot 1, je pravi odgovor lahko samo (b).

4. Če je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna vrsta z vsoto 5 in $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna vrsta z vsoto 6, potem je zaporedje $(a_n + b_n)$

   (a) konvergentno z limito 0,

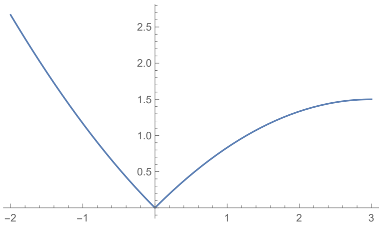
   (b) konvergentno z limito 11,

   (c) divergentno,

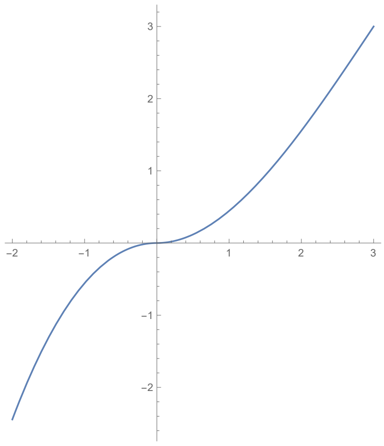
   (d) lahko konvergentno ali divergentno (imamo premalo podatkov).

   Rešitev: Če je vrsta konvergentna, gredo členi vrste proti 0. Ker to velja tako za (a_n) kot za (b_n), gresta obe zaporedji proti 0. Torej gre tudi vsota zaporedij $(a_n + b_n)$ proti 0. Odgovor (a).

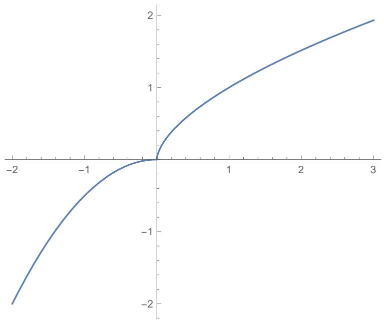
5. Na spodnji sliki je graf funkcije f:



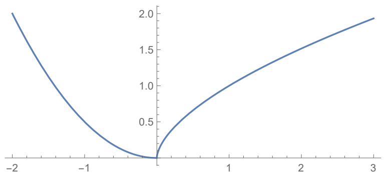
Kateri od spodnjih grafov prikazuje nedoločeni integral funkcije f?



(a)



(b)



(c)

(d) Nedoločeni integral ne obstaja, saj funkcija f ni odvedljiva v točki 0.

Rešitev: Zveza med funkcijo f in njenim nedoločenim integralom F je $F'(x) = f(x)$. Torej mora biti F povsod odvedljiva funkcija, zato odpadeta odgovora (b) in (c). Odgovor (d) prav tako ni smiseln, saj imajo nedoločeni integral lahko tudi funkcije, ki niso odvedljive. Pravi odgovor je zato (a).

Drugi sklop

V spodnjih nalogah obkroži pravilni odgovor (pravilen je le en odgovor). Odgovor kratko utemelji (v enem stavku). Napačen odgovor ne prinaša negativnih točk, vsak pravilen odgovor pa je skupaj z utemeljitvijo vreden 2 točki.

1. Naj bo (a_n) naraščajoče in (b_n) padajoče zaporedje. Denimo, da je $a_n \leq b_n$ za vse n. Potem je zaporedje (a_n)

   (a) konvergentno,

   (b) divergentno,

   (c) lahko konvergentno ali divergentno (nimamo dovolj podatkov).

   Rešitev: Odgovor je (a). Če je zaporedje b_n padajoče, so vsi členi manjši ali enaki prvemu členu b_1. Torej za vse člene a_n velja $a_n \leq b_1$. Zaporedje a_n je tako naraščajoče in navzgor omejeno s številom b_1. Po izreku je zato konvergentno.

2. Za vsako zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2 = f(0)^2$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$,

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

   Rešitev: Odgovor je (a). Ker je funkcija f zvezna, je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Po pravilu za limite je torej $\lim\limits_{x\to 0} f(x)^2 = \lim\limits_{x\to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \cdot f(0) = f(0)^2$. (Odgovor (b) ni smiseln, saj funkcija f ni nujno odvedljiva, odgovor (c) pa prav tako, saj f ne gre nujno proti 0, ko gre x proti neskončno.)

3. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Če je F naraščajoča funkcija na vsej realni osi, potem je funkcija f

   (a) konveksna na vsej realni osi,

   (b) večja ali enaka 0 na vsej realni osi,

   (c) nič od naštetega (nimamo dovolj podatkov).

   Rešitev: Odgovor je (b). Zveza med f in F je $F'(x) = f(x)$. Če je F povsod naraščajoča, je $F'(x) \geq 0$ za vse x, torej je $f(x) \geq 0$ za vse x.

Tretji sklop

Kratko odgovori na vsako od spodnjih nalog. Vsak odgovor je vreden 2 točki.

1. Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $f(x) = 1 + \sin x$ okrog točke 0.

   Rešitev: $1 + \sin x = 1 + x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \mp \cdots$

2. Poišči funkcijo, katere nedoločeni integral je $(\tan x)^2 + C$.

   Rešitev: Izraz moramo odvajati. Dobimo $f(x) = 2\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

3. Naj bo $f(x, y)$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija. Napiši pogoje, iz katerih sledi, da ima funkcija f lokalni maksimum v točki (a, b).

   Rešitev: Točka (a, b) mora biti stacionarna, tj. $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, Hessejeva determinanta $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2$ mora biti pozitivna in parcialni odvod $f_{xx}(a, b)$ mora biti negativen. To so zadostni pogoji, da ima funkcija lokalni maksimum v točki (a, b).

4. Naj bo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija, ki ima pol v levem krajišču $x = a$. Kako je definiran izlimitirani (tj. posplošeni) integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$?

   Rešitev: Definicija je $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x)dx$.

5. Poišči primer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ brez realnih ničel, za katero velja $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ in $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. (Zadošča tudi skica grafa.)

   Rešitev: Takšna funkcija ne more biti zvezna, saj bi v tem primeru zvezno prešla abscisno os in bi zato imela ničlo. Kljub temu mora biti skladno z navodili funkcija definirana na vsej realni osi. Takšna funkcija je npr.

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$