Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Linearna algebra: računski izpit

03. junij 2022

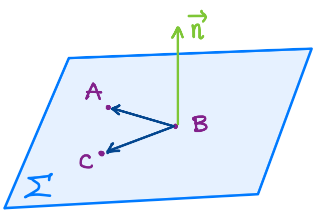
Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na *ucilnica.fri.uni-lj.si*. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Točke $A(5,2,1), B(1,0,1)$ in $C(3,5,5)$ določajo ravnino Σ. Premica p pa je dana z enačbo

$$\frac{1-x}{2} = 2-y = z-1.$$

a) (9) Poišči enačbo ravnine Σ.



$\vec{BA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{bmatrix} 8 \\ -16 \\ 16 \end{bmatrix}$

izberemo : $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Sigma: \quad \vec{r}^T \cdot \vec{n} = \vec{r}_B^T \cdot \vec{n}$

$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{x - 2y + 2z = 3}$

b) (9) Poišči koordinate točke P, v kateri se ravnina Σ in premica p sekata.

$p: \ \frac{1-x}{2} = 2-y = z-1$

$\downarrow$

$y = 2 - \frac{1-x}{2}$

$z = \frac{1-x}{2} + 1$

$\Sigma: \ x - 2y + 2z = 3$

$x - 2\left(2 - \frac{1-x}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{1-x}{2} + 1\right) = 3$

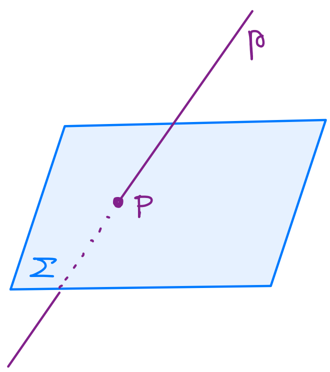
$\cancel{x} - 4 + \cancel{1} - \cancel{x} + 1 - x + \cancel{2} = \cancel{3}$

$x = -3$

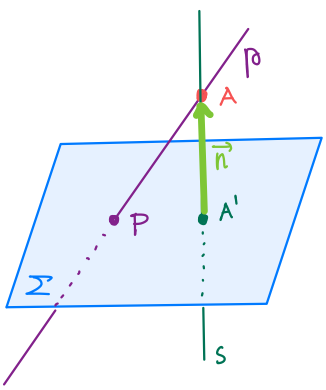
$y = 0$

$z = 3$

$\boxed{P(-3,0,3)}$



c) (7) Naj bo A točka s koordinatami $(1,2,1)$. Ali leži točka A na ravnini Σ? Če ne, poišči točko A', ki leži na ravnini Σ in je hkrati najbližja točki A.



$S: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x = 1 + t$

$y = 2 - 2t$

$z = 1 + 2t$

$\Sigma: \ x - 2y + 2z = 3$

$1 + t - 4 + 4t + 2 + 4t = 3$

$9t = 4$

$t = \frac{4}{9}$

$x = \frac{13}{9}$

$y = \frac{10}{9}$

$z = \frac{17}{9}$

$\boxed{A'\left(\frac{13}{9}, \frac{10}{9}, \frac{17}{9}\right)}$

2. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ter} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Reši matrično enačbo $A + XB = 3X$.

$$A + XB = 3X$$

$$A = 3X - XB$$

$$A = X \cdot (3I - B)$$

$$\boxed{X = A \cdot (3I - B)^{-1}}$$

$$3I - B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[3I - B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [I \mid (3I - B)^{-1}]$$

$$X = A \cdot (3I - B)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}}$$

3. naloga (25 točk)

Naj bo preslikava $\mathcal{F}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$\mathcal{F}([x_1, x_2, x_3, x_4]^{\mathsf{T}}) = [x_1 + x_2, x_3 + x_4, x_1 + x_3]^{\mathsf{T}}.$$

a) (10) Pokaži, da je $\mathcal{F}$ linearna preslikava.

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^4: \quad \mathcal{F}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \\ x_4+y_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ x_3+y_3+x_4+y_4 \\ x_1+y_1+x_3+y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_3+x_4 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ y_3+y_4 \\ y_1+y_3 \end{bmatrix} = \mathcal{F}(\vec{x}) + \mathcal{F}(\vec{y})$$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^4, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \mathcal{F}(\alpha\vec{x}) = \mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ \alpha x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x_1+\alpha x_2 \\ \alpha x_3+\alpha x_4 \\ \alpha x_1+\alpha x_3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_3+x_4 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \mathcal{F}(\vec{x})$$

Velja tudi: $\quad \mathcal{F}(\vec{0}) = \vec{0}$

$\mathcal{F}$ je linearna preslikava.

b) (8) Poišči matriko, ki pripada $\mathcal{F}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.

$$B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1\\0\\1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0\\1\\1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

c) (7) Poišči bazo za $\ker \mathcal{F}$. Ali je $\mathcal{F}$ bijekcija?

$$\ker \mathcal{F} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathcal{F}(\vec{x}) = \vec{0} \} = N(A_{\mathcal{F}})$$

$$\begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 1&0&1&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 0&-1&1&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&1&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&-1 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} t\\-t\\-t\\t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\ker \mathcal{F}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\mathcal{F}$ ni bijekcija, ker $\ker_{\mathcal{F}} \neq \{\vec{0}\}$.

($\mathcal{F}$ ni injektivna.)

4. naloga (25 točk)

Zaporedje je podano rekurzivno s formulo

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$$

in začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 8$.

a) (5) Rekurzivno formulo najprej napiši v matrični obliki $\mathbf{x}_n = A \cdot \mathbf{x}_{n-1}$, kjer je $\mathbf{x}_n = [a_n, a_{n-1}]^\mathsf{T}$.

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_n = A \cdot \vec{x}_{n-1}$$

b) (10) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje matrike A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$$

$\boxed{\lambda_1 = 3}$ $\quad (A - 3I)\vec{x} = \vec{0}, \ \vec{x} = ?$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} x_1 = 3t \\ x_2 = t \end{matrix} \qquad \vec{x} = t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= \vec{v}_1}$$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ $\quad (A + I)\vec{x} = \vec{0}, \ \vec{x} = ?$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{matrix} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{matrix} \qquad \vec{x} = t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{= \vec{v}_2}$$

c) (10) Začetni vektor $\mathbf{x}_1 = [a_1, a_0]^\mathsf{T} = [8, 0]^\mathsf{T}$ razvij po lastni bazi matrike A in poišči eksplicitno formulo za a_n.

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \cdot \vec{v}_1 + \beta \cdot \vec{v}_2 = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{x}_2 = A \cdot \vec{x}_1 = 2 \cdot A\vec{v}_1 - 2A \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot \lambda_1 \vec{v}_1 - 2 \cdot \lambda_2 \vec{v}_2 = 2 \cdot 3 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot (-1) \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{x}_3 = A \cdot \vec{x}_2 = \ldots = 2 \cdot 3^2 \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot (-1)^2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_n = A \cdot \vec{x}_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot \vec{v}_1 - 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \vec{v}_2 = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot (-1)^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3^n - 2 \cdot (-1)^n \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 2 \cdot (-1)^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a_n = 2 \cdot \left(3^n - (-1)^n\right)}$$