

Linearna algebra: 2. kolokvij

18. maj 2022

Čas pisanja: 90 minut. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena. Rezultati bodo objavljeni na ucilnica.fri.uni-lj.si. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1
2
3
Σ

1. naloga (25 točk)

Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) (10) Izračunaj determinanti matrik A in B .

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1}} = -2 \cdot (-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-1-1) = \underline{\underline{-16}}$$

Ker matrike B dobimo iz matrike A z menjavo 3. in 4. vrstice, je $\underline{\underline{\det B = (-1) \det A = 16}}$.

b) (10) Izračunaj determinante matrik $A+B$, $A-B$, $(AB)^T$ in AB^{-1} .

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{0}}, \text{ ker sta dve vrstici enaki}$$

$$\det(A-B) = \underline{\underline{0}}, \text{ ker je 1. vrstica } 0 \text{ (ali 2. ali pa 3. = -4.)}$$

$$\det(AB)^T = \det(AB) = \det A \cdot \det B = -16 \cdot 16 = \underline{\underline{-256}}$$

$$\det(AB^{-1}) = \det A \cdot (\det B)^{-1} = \frac{-16}{16} = \underline{\underline{-1}}$$

c) (5) Koliko naj bo t , da bo veljalo $\det(-tB) = 1$?

$$\det(-tB) = (-t)^4 \det B = t^4 \det B = t^4 \cdot 16 = 1$$

$$t^4 = \frac{1}{16}$$

$$\underline{\underline{t = \pm \frac{1}{2}}}$$

2. naloga (25 točk)

Dana sta matrika A in vektor v :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$

a) (10) Poišči ortonormirano bazo za $C(A)$.

$$\vec{u}_1 = \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|\vec{u}_1\| = 3, \quad \|\vec{u}_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{g}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\vec{g}_1, \vec{g}_2\} \text{ je ONB za } C(A)$$

b) (8) Poišči ortonormirano bazo za $C(A)^\perp$.

$$\text{1. način: } \vec{g}_1 \times \vec{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \vec{g}_3$$

$$\text{2. način: } C(A)^\perp = N(A^T)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -4z \\ y = z \end{matrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\vec{g}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

c) (7) Določi pravokotno projekcijo vektorja $\vec{v}$ na $C(A)$.

$$\text{1. način: } \text{proj}_{C(A)}(\vec{v}) = (\vec{g}_1 \cdot \vec{v}) \vec{g}_1 + (\vec{g}_2 \cdot \vec{v}) \vec{g}_2 = \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{2. način: } \text{proj}_{C(A)}(\vec{v}) = \vec{v} - \text{proj}_{C(A)^\perp}(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{36}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. naloga (25 točk)

Pri nekih meritvah smo dobili naslednje vrednosti:

x_i	0	1	2	3
y_i	4	1	-3	5

Iščemo funkcijo $f(x) = ax + b \cdot 2^x$, ki se tem podatkom kar najboljše prilaga.

a) (10) Zapiši pripadajoči sistem enačb za neznana parametra a in b v obliki $A\vec{x} = \vec{f}$. Ali je sistem rešljiv?

$$\left. \begin{array}{l} a \cdot 0 + b \cdot 1 = 4 \\ a \cdot 1 + b \cdot 2 = 1 \\ a \cdot 2 + b \cdot 4 = -3 \\ a \cdot 3 + b \cdot 8 = 5 \end{array} \right\} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{I} \Rightarrow b = 4$$

$$\text{II} \Rightarrow a + 8 = 1 \\ a = -7$$

$$\text{III} \Rightarrow -14 + 16 = -3$$

$2 = -3 //$ sistem ni rešljiv

b) (15) Zapiši pripadajoči normalni sistem in izračunaj a in b po metodi najmanjših kvadratov.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 34 \\ 34 & 85 \end{bmatrix}$$

$$A^T \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 34 & 10 \\ 34 & 85 & 34 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 17 & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 17 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 7 & 0 & -63 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{a = -9}} \quad \underline{\underline{b = 4}}$$

I:2

II:17

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot \text{I} & 14 \quad 34 \quad | \quad 10 \\ 7 \cdot \text{II} & 14 \quad 35 \quad | \quad 14 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{I} & 7 \quad 17 \quad | \quad 5 \\ 17 \cdot \text{II} & 0 \quad 17 \quad | \quad 68 \end{array}$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) (9) Določi vse lastne vrednosti matrike A .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 5+\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda & 2+\lambda \\ 3 & 2+\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = \\ &= - (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{II}-\text{I}]{+} - (2+\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -2-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - (\lambda+2)^2 \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{- (\lambda+2)^2 (\lambda-1)}{\lambda_{1,2}=-2 \quad \lambda_3=1} \end{aligned}$$

b) (8) Določi lastni podprostor za najmanjšo lastno vrednost matrike A .

$$N(A + 2I) = ?$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x = -y - z \quad \begin{bmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L_{-2} = \text{lin} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$$

Ker imamo za 3×3 matriko 3 lin. neodvisne l. vektorje, je A diagonalizabilna.

c) (8) Ali je A možno diagonalizirati? Če obstaja, poišči diagonalno matriko D in obrnljivo matriko P , da bo $D = P^{-1}AP$.

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} y = -z \\ x = -y = z \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} z \\ -z \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3$ $\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3$