3. izpit iz teorije iz Osnov matematične analize – Rešitve

20. 4. 2022

Prvi sklop

Pri naslednjih nalogah obkroži le **en** odgovor. Pravilen odgovor pri vsaki nalogi prinese 3 točke, napačen pa -1 točko. Neodgovorjena naloga (ali prečrtan odgovor) prinese 0 točk.

1. Parcialna odvoda funkcije $f(r, \varphi) = r\cos^2\varphi + r$ sta enaka

   (a) $f_r = \cos^2\varphi + 1$ in $f_\varphi = 2r\sin\varphi\cos\varphi$,
   (b) $f_r = \sin^2\varphi + 1$ in $f_\varphi = 2r\sin\varphi\cos\varphi$,
   (c) $f_r = \cos^2\varphi + 1$ in $f_\varphi = -2r\sin\varphi\cos\varphi$,
   (d) $f_r = \sin^2\varphi + 1$ in $f_\varphi = -2r\sin\varphi\cos\varphi$.

   Rešitev: Z odvajanjem po obeh spremenljivkah preverimo, da je pravi odgovor (c).

2. Integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ je enak

   (a) $\frac{\pi}{2}$
   (b) $\frac{\pi}{3}$
   (c) $\frac{\pi}{6}$
   (d) $\arctan\frac{1}{2}$

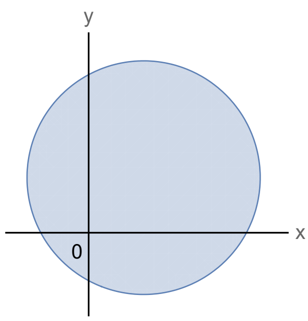
   Rešitev: Ko integriramo, dobimo $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, torej je pravi odgovor (c).

3. Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = \sin\frac{\pi}{7} - i$ je približno enaka

   (a) 0.31,
   (b) 1.09,
   (c) 3.57,
   (d) 7.45.

   Rešitev: Absolutna vrednost je enaka $\sqrt{(\sin\frac{\pi}{7})^2 + 1}$. Ker je $\sin\frac{\pi}{7}$ na intervalu $[0, 1]$, je absolutna vrednost med 1 in $\sqrt{2}$, torej je pravi odgovor (b).

4. Katera od spodaj naštetih množic kompleksnih števil je prikazana na sliki?



   (a) $\{z \in \mathbb{C};\ |z - 3e^{\frac{11\pi i}{4}}| < 2\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C};\ |z - 3e^{\frac{9\pi i}{4}}| < 2\}$,
   (c) $\{z \in \mathbb{C};\ |z - 2e^{\frac{11\pi i}{4}}| < 3\}$,

(d) $\{z \in \mathbb{C};\ |z - 2e^{\frac{9\pi i}{4}}| < 3\}$.

Rešitev: Neenačba $|z-a| < r$ podaja krog s središčem a in polmerom r. Središče krožnice na sliki ima kot $\frac{\pi}{4}$. Izmed kotov med rešitvami to ustreza kotu $\frac{9\pi}{4}$, saj po odštevanju periode 2π res dobimo $\frac{\pi}{4}$. Nadalje, polmer krožnice na sliki je večji od absolutne vrednosti središča, saj krog vsebuje koordinatno izhodišče (r je večji od $|a|$). Torej je pravi odgovor (d).

5. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kovergentna vrsta z vsoto 5, potem je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)^2$

   (a) konvergentna z vsoto 0,

   (b) konvergentna z vsoto 36,

   (c) divergentna,

   (d) lahko konvergentna, lahko divergentna (imamo premalo podatkov).

Rešitev: Ker začetna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, zaporedje a_n konvergira proti 0. Zaporedje $(a_n+1)^2$ torej konvergira proti 1. Torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+1)^2$ divergira, saj njeni členi ne gredo proti 0. Pravi odgovor je (c).

Drugi sklop

V spodnjih nalogah obkroži pravilni odgovor (pravilen je le en odgovor). Odgovor kratko utemelji (v enem stavku). Napačen odgovor ne prinaša negativnih točk, vsak pravilen odgovor pa je skupaj z utemeljitvijo vreden 2 točki.

1. Za neko trditev $T(n)$ velja, da je trditev pravilna za $n = 1$. Za poljubno naravno število n pa velja tudi, da če je pravilna trditev $T(n)$, potem je pravilna tudi trditev $T(n+4)$. Katera od spodaj naštetih trditev je gotovo pravilna?

   (a) $T(2020)$

   (b) $T(2021)$

   (c) $T(2022)$

   Rešitev: Pravi odgovor je (b). Iz navodil vidimo, da velja $T(1)$, $T(5)$, $T(9)$, $T(13)$, ... oziroma za vse $T(4k + 1)$, kjer je k poljubno naravno število. Torej zagotovo velja tudi $T(2021)$.

2. Če je zaporedje (a_n) divergentno in zaporedje (b_n) divergentno, potem je vsota $a_n + b_n$

   (a) konvergentno zaporedje,

   (b) divergentno zaporedje,

   (c) lahko konvergentno, lahko divergentno (nimamo dovolj podatkov).

   Rešitev: Pravi odgovor je (c). Če vzamemo $a_n = n$ in $b_n = n$, dobimo divergentno zaporedje $a_n + b_n = 2n$, če pa vzamemo $a_n = n$ in $b_n = -n$, pa je $a_n + b_n = 0$ konvergentno zaporedje.

3. Za vsako odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$,

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = f'(0)$,

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,

   Rešitev: Ker je f odvedljiva, je zvezna. Velja torej pogoj (a), saj je f zvezna v 0, in to je tudi pravilni odgovor, saj ostala dva odgovora nista smiselna.

4. Naj bo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitivna funkcija odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Če je F konveksna funkcija na vsej realni osi, potem je funkcija f

   (a) naraščajoča na vsej realni osi,

   (b) večja ali enaka 0 na vsej realni osi,

   (c) nič od naštetega (nimamo dovolj podatkov).

   Rešitev: Velja zveza $F' = f$. Ko odvajamo, dobimo $F'' = f'$. Ker je F konveksna, je $F'' \geq 0$, torej $f' \geq 0$, torej je f naraščajoča funkcija. Pravi odgovor je (a).

Tretji sklop

1. (2 točki) Napiši pogoje, ki morajo biti izpolnjeni, da lahko uporabimo bisekcijo za iskanje ničle funkcije f na intervalu $[a, b]$.

   Rešitev: Funkcija f mora biti zvezna na intervalu $[a, b]$, funkcijski vrednosti $f(a)$ in $f(b)$ pa morata biti nasprotno predznačeni.

2. (2 točki) Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $f(x) = e^x - x$ okrog točke 0.

   Rešitev: Taylorjeva vrsta za e^x je $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. Torej je $e^x - x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$.

3. (2 točk) Naj bo $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ funkcija, ki ima pol v desnem krajišču $x = b$. Kako je definiran izlimitirani integral $\int_a^b f(x)dx$?

   Rešitev: Integral je definiran kot limita $\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx$.

4. (2 točk) Poišči primer odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ima lokalne maksimume le v točkah $\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$ (tj. kjer je x sodo celo število), lokalne minimume pa v točkah $\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$ (tj. kjer je x liho celo število). Napiši eksplicitni predpis za $f(x)$.

   Rešitev: Funkcija $\cos x$ skoraj ustreza pogojem, saj ima maksimume v točkah $\ldots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ in minimume v točkah $\ldots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$. Če njen graf stisnemo s faktorjem π, dobimo željeno funkcijo $f(x) = \cos(\pi x)$.