RT 2021: Domače naloge

Rok Žitko

1 Dvojno nihalo

Napiši program za numerično reševanje enačb gibanja $\ddot{x_1} + x_1 + ax_2 = 0$, $\ddot{x_2} + x_2 + ax_1 = 0$, kjer je a majhna konstanta. Na začetku izmaknemo nihalo 1, nihalo 2 pa miruje. Kakšno gibanje dobimo?

Nato si oglej še primer z nelinearno sklopivijo: $\ddot{x_1} + x_1 + ax_2^2 = 0$, $\ddot{x_2} + x_2 + ax_1^2 = 0$. Prouči, kaj se dogaja za različno velike vrednosti parametra a.

2 Simulacija nehomogene verige sklopljenih nihal

Imejmo sistem $N = 1000$ z vzmetmi povezanih nihal, ki jih opišemo z enačbami (razdelek 1.10)

$$-K(\psi_n - \psi_{n-1}) - K(\psi_n - \psi_{n+1}) = m_n\ddot{\psi}_n, \tag{1}$$

za $n = 1, \dots, N$, dodatno pa velja še $\psi_{N+1} = 0$ in $\psi_0 = A\sin(\omega t)$. Mase nihal m_n so lahko različne. Na začetku vsa nihala mirujejo, $\psi_n(t = 0) = \dot{\psi}_n(t = 0) = 0$ za $n = 1, \dots, N$.

a) Reši program, ki bo računal časovno dinamiko sistema nihal z metodo končnih korakov (razdelek 1.1). Preizkusi ga za primer enakih mas, $m_n \equiv m$. Kaj se zgodi z valovanje, ko pride do desnega roba? Za lažje računanje izberi $K = m = 1$, primerni vrednosti za ω in A pa poišči sam!

b) Kaj se zgodi, če obravnavamo isti problem, a se mase nihal razlikujejo? Zapiši $m_n = 1 + \delta m_n$, kjer dodatne mase δm_n naključno izžrebaš v nekem izbranem intervalu $[-a : a]$. Kaj se zgodi s povečevanjem širine intervala $2a$?

3 Schmidtov razcep in entropija prepletenosti

Schmidtov razcep ja operacija, pri kateri vektor iz produktnega prostora zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz posameznih prostorov:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle, \tag{2}$$

kjer je n dimenzija posameznega prostora ($n = 2$ za kubite), $|u_i\rangle$ in $|v_i\rangle$ pa vektorja iz posameznih prostorov. Če je od nič različna le ena vrednosti α_1, potem je stanje separabilno, sicer pa je vsaj delno prepleteno. V splošnem jakost kvantne prepletenosti kvantificiramo z entropijo prepletenosti:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \log(|\alpha_i|^2). \tag{3}$$

Napiši program, ki naključno generira pare kubitov $\psi = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$ z amplitudami c_{ij}, ki so enakomerno naključno porazdeljene v intervalu $[0 : 1]$, vektorje normira, izračuna koeficiente α_i in nato še entropijo S. Določi histogram vrednosti S za 10000 realizacij.

4 Simulacija kvantnega vezja

V opisnem jeziku OpenQASM zapiši implementacijo vezja, ki iz produktnega stanja $|00\rangle$ ustvari prepleteno stanje $|\beta_{00}\rangle$, potem pa to stanje ponovno "razplete" v produktno stanje $|00\rangle$. Ta postopek naj se ponovi 100-krat, na koncu pa pomerimo rezultat v standardni bazi. Algoritem izvedi na pravem kvantnem računalniku v oblaku (IBM Quantum Experience) ali pa v simulatorju (Qiskit Aer) z realističnim modelom dekoherence.

5 Simulacija spina v časovno odvisnem polju

V razdelku 3.21 učbenika je zapisana splošna rešitev za časovno odvisnost stanja spina v konstantnem (po času) magnetnem polju v smeri osi z. Podobno lahko izpeljemo tudi rešitev za polje v smeri osi x. Časovno odvisno polje lahko obravnavamo tako, da takšne rešitve uporabimo za kratke časovne intervale Δt.

a) Izpelji splošno rešitev za gibanje spina v polju, ki kaže v smeri osi x.

b) Na ta način obravnavaj dinamiko spin v časovno spremenljivem polju, kjer za čas T deluje polje v smeri osi z, nato pa za čas bT deluje polje v smeri osi x, nato pa se cikel ponovi. b je neka majhna konstanta.

c) Razišči gibanje spina po dolgem času v odvisnosti od vrednosti parametra b.

6 Strelska metoda

Problem lastnih je naloga tipa $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$, kjer je A nek operator, λ pa neznana količina (lastna vrednost), ki pripada rešitvi $|v\rangle$. Schroedingerjeva enačba za kvantni delec je tudi tega tipa (razdelka 5.3 in 5.7). Obravnavajmo enodimenzionalni kvantni harmonski oscilator:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + \frac{1}{2}k^2x^2\psi(x) = E\psi(x). \quad (4)$$

Možen način reševanja je strelska metoda. Izberemo točko $x_0 < 0$, izberemo neki vrednosti $a = \psi(x_0)$ in $b = \psi'(x_0)$ v tej točki, in izračunamo vrednosti $\psi(x)$ za $x > x_0$. Za velike $x > 0$ bo rešitev divergirala proti $+\infty$ ali $-\infty$. S popravljanjem $b = \psi'(x_0)$ skušamo doseči, da rešitev ne divergira. Če nam to uspe, smo našli rešitev.

Nalogo si tu poenostavimo tako, da uporabimo znane vrednosti za lastne energije E, torej

$$E = \hbar\omega(n + 1/2), \quad (5)$$

kjer je $\omega = \sqrt{k/m}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ pa je celo število.

a) Napiši implementacijo tega algoritma. Postavi $\hbar = k = m = 1$, da se izraz poenostavi. Izberi recimo $x_0 = -10$. Določi dve vrednosti b, tako da bo za eno vrednost funkcija divergirala proti $+\infty$, za drugo pa proti $-\infty$. Potem z bisekcijo poišči rešitev.

b) Na ta način poišči osnovno stanje in prvi dve vzbujeni stanji kvantnega harmonskega oscilatorja in primerjaj s točno rešitvijo (razdelek 5.9.3)!

7 Vezano stanje za ozek privlačen potencial

Numerično reši stacionarno Schroedingerjevo enačbo za primer potenciala, ki je povsod enak nič, le v bližini izhodišča je močno privlačen. Potencial lahko opišeš z Gaussovo funkcijo, katere širino zmanjšuješ, globino pa povečuješ, tako da je integral ves čas konstanten. Ugotovi, h kateri funkciji rezultat (valovna funkcija) konvergira z zmanjševanjem širine!

Problem se lahko reši s strelsko metodo, opisano zgoraj, ali pa z diskretizacijo problema in numerično diagonalizacijo dobljene matrike.

8 Kvantno nihalo

Numerično reši stacionarno Schroedingerjevo enačbo za matematično nihalo:

$$-\frac{\hbar^2}{2ml^2}\frac{d^2\psi}{d\phi^2} + mgl(1 - \cos\phi)\psi = E\psi, \quad (6)$$

kjer je m masa uteži, l dolžina vrvice, g gravitacijski pospešek. Valovna funkcija $\psi(\phi)$ je definirana na intervalu $[0 : 2\pi]$.

Problem reši z diskretizacijo po kotu ϕ in numerično diagonalizacijo dobljene matrike.

9 Časovno odvisna Schroedingerjeva enačba za naključno začetno valovno funkcijo

Napiši program za reševanje časovno odvisne Schroedingerjeve enačbe v eni dimenziji. Kot začetno stanje si izberi valovno funkcijo, ki jo dobiš tako, da njene vrednosti naključno izbereš v točkah diskretizacijske mreže na intervalu $[0:1]$, drugod pa naj bo enaka nič.

a) Kako se obnaša rešitev po kratkem času?

b) Kako po zelo dolgem?

10 Simulacije ionske pasti

Električni potencial, ki ga čutijo ioni v pasti, lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm dc} &= U_0[z^2 - (x^2 + y^2)]/2, \\ \Phi_{\rm ac} &= (V_0 \cos(\omega t) + U_r)(1 + (x^2 - y^2)/R^2)/2. \end{aligned} \tag{7}$$

a) Izračunaj silo na ion v vseh treh smereh.

b) Numerično simuliraj gibanje iona v tem časovno odvisnem potencialu. Poišči vrednosti parametrov U_0, V_0, ω, U_r in R, da ion ostane ujet v pasti.

11 Slaba naključna števila

Napiši program, ki bo generiral slaba naključna binarna števila, ki so a) pristrana (povprečna vrednost različna od $1/2$) in/ali b) serijsko korelirana (pričakovana vrednost n-tega števila je odvisna od pričakovane vrednosti $n-1$-tega števila).

Preizkusi tako dobljeni sekvenci s standardnimi programi za preverjanje naključnosti, denimo `ent` od Johna Walkerja ali `DieHarder` od Georga Marsaglie in in Roberta G. Browna.