Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Osnove matematične analize: 2. računski izpit

2. februar 2022

Čas pisanja je 80 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \frac{3}{4-x}$$

Definirajmo rekurzivno zaporedje a_n s pravilom

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= f(a_n) \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

a) (4 točke) Izračunaj a_2.
Rešitev :

$$a_1 = \frac{3}{4-0} = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{3}{4-\frac{3}{4}} = \frac{12}{13}$$

b) (6 točk) Za katere vrednosti x velja $f(x) \geq x$?
Rešitev : Rešujemo neenačbo

$$\frac{3}{4-x} \geq x$$

Za $x = 4$ izraz ni definiran. Za $4 - x > 0$ (torej $x < 4$) dobimo ekvivalentno neenačbo

$$3 \geq x(4-x)$$

ali

$$(x-1)(x-3) \geq 0$$

Ta kvadratna funkcija ima nenegativne vrednosti za $x \leq 1$ ali $x \geq 3$. Ker račun velja samo za $x > 4$, za rešitev dobimo $x \in (-\infty, 1] \cup [3, 4)$.

Za $4 - x < 0$ (torej $x > 4$) dobimo neenačbo

$$(x-1)(x-3) \leq 0$$

Ta je izpolnjena za $1 \leq x \leq 3$. Ker je ta pogoj v nasprotju s pogojem $x > 4$, tu ne dobimo rešitve.

Obenem opazimo, da je enakost v neenačbi izpolnjena za $x = 1$ in $x = 3$, kar sta fiksni točki iteracije.

c) (10 točk) Dokaži, da je zaporedje a_n naraščajoče in omejeno navzgor.
Rešitev : Po namigih iz **a)** in **b)** naloge lahko domnevamo, da je zaporedje navzgor omejeno z 1. To lahko dokažemo z indukcijo.

Indukcijsko bazo imamo po definiciji $a_0 = 0 < 1$. Poskusimo dokazati, da pri indukcijski predpostavki $a_n \leq 1$ velja tudi

$$a_{n+1} \leq 1$$

Ta neenačba je ekvivalentna

$$\frac{3}{4 - a_n} \leq 1$$

Ker po indukcijski predpostavki velja $a_n \leq 1$, velja tudi $a_n < 4$ oz. $4 - a_n > 0$. Po množenju neenačbe z $4 - a_n$ dobimo

$$3 \leq 4 - a_n$$

kar je ekvivalentno indukcijski predpostavki

$$a_n \leq 1.$$

Dokažemo še, da je zaporedje a_n naraščajoče. Ker že vemo, da velja $a_n \leq 1$, lahko po točki **b)** sklepamo, da velja

$$a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$$

d) (5 točk) Kaj je limita zaporedja a_n?
Rešitev : Ker je zaporedje naraščajoče in omejeno navzgor z 1, vemo, da ima limito. Edini fiksni točki iteraciji sta 1 in 3, torej je limita lahko edino $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = \log(x^2 + 2x + 2)$$

a) (5 točk) Določi definicijsko območje funkcije f. Ali je f injektivna?
Rešitev : Funkcija f je definirana za vrednosti $x \in \mathbb{R}$, za katere velja

$$x^2 + 2x + 2 > 0$$

Ta kvadratna funkcija ima diskriminanto

$$D = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

kar pomeni, da nima realnih ničel. Ker je vodilni člen pozitiven, je kvadratna funkcija povsod pozitivna, torej je tudi f definirana povsod.

Kvadratne funkcije niso injektivne, torej je jasno, da tudi f ne more biti injektivna funkcija. Recimo,

$$f(-2) = f(0) = \log(2)$$

b) (10 točk) Določi ničle funkcije f, stacionarne točke ter intervale naraščanja in padanja. Kje ima f minimum?
Rešitev : Enačba

$$f(x) = \log(x^2 + 2x + 2) = 0$$

velja natanko takrat, ko velja

$$x^2 + 2x + 2 = 1$$

ali

$$(x + 1)^2 = 0$$

Dobimo torej eno (dvojno) ničlo $x_{1,2} = -1$.

Odvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}(2x + 2)$$

Ker vemo, da velja $x^2 + 2x + 2 > 0$ za vse x, je enačba

$$f'(x) = 0$$

ekvivalentna enačbi

$$2x + 2 = 0$$

ali $x = -1$. Neenačbi $f'(x) > 0$ in $f'(x) < 0$ pa sta (zaradi dejstva $x^2 + 2x + 2 > 0$) ekvivalentni neenačbama

$$x > -1 \quad \text{oz.} \quad x < -1$$

Funkcija torej pada za $x < -1$, narašča za $x > -1$, stacionarna točka $x = -1$ pa je minimum funkcije.

c) (5 točk) Izračunaj limiti

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\log(x)} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\log(-x)}$$

Rešitev : Po L'Hopitalovem pravilu računamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^2+2x+2)}{\log(x)} = \lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{2x+2}{x^2+2x+2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} = \frac{2x^2+2x}{x^2+2x+2} = 2$$

Podoben izračun da tudi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{\log(-x)} = 2$$

d) (5 točk) Na podlagi ugotovitev iz prejšnjih točk skiciraj funkcijo f.
Rešitev : f ima ničlo in hkrati minimum pri $x = -1$, v smereh $x \to \infty$ oz. $x \to -\infty$ pa po **c)** točki narašča približno 'enako hitro' kot $2\log(x)$ oz. $2\log(-x)$.

3. naloga (25 točk)

V elipso z enačbo

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

včrtamo pravokotnik, ki ima stranice vzporedne koordinatnim osem (tako da oglišča pravokotnika ležijo na elipsi).

Poiskati želimo včrtan pravokotnik z največjim možnim obsegom.

a) (5 točk) Za dano oglišče pravokotnika $T(x, y)$ v prvem kvadrantu ($x \geq 0$ in $y \geq 0$) zapiši obseg pravokotnika kot funkcijo (x, y).
Rešitev : Če ima eno oglišče pravokotnika koordinati (x, y) so koordinate ostalih oglišč $(-x, y)$, $(x, -y)$ in $(-x, -y)$. Pravokotnik ima torej stranici dolžine $2x$ in $2y$, obseg pa je enak

$$f(x, y) = 4x + 4y$$

b) (5 točk) Zapiši ustrezno Lagrangeovo funkcijo za ta problem.
Rešitev : Lagrangeova funkcija je

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 4y - \lambda \left(\frac{x^2}{3} + y^2 - 1 \right)$$

c) (15 točk) Kakšen je največji možni obseg tako včrtanega pravokotnika?
Rešitev : Za ekstrem dobimo enačbe

$$\begin{aligned} L_x &= 4 - \lambda \cdot \frac{2x}{3} = 0 \\ L_y &= 4 - \lambda \cdot 2y = 0 \\ L_\lambda &= \frac{x^2}{3} + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Iz prvih dveh enačb lahko izrazimo

$$x = \frac{6}{\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

in to vstavimo v zadnjo enačbo, da dobimo

$$\frac{12}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1$$

Sledi $\lambda = \pm 4$. Po predpostavki, da leži (x, y) v prvem kvadrantu, nas zanima samo pozitvna rešitev

$$x = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}$$

Največji možen obseg je torej

$$f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = 8$$

4. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x) = (x-1)^{3/2}$$

a) (13 točk) Izračunaj dolžino loka krivulje $y = f(x)$ na intervalu $x \in [1,2]$.
Rešitev : Izračunati moramo integral

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Izračunamo odvod

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)^{1/2}$$

Po poenostavitvi dobimo

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(9x - 5)$$

Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5} dx$$

lahko izračunamo zamenjavo spremenljivke

$$\begin{aligned} t &= 9x - 5 \\ dt &= 9dx \end{aligned}$$

Dobimo

$$\int_{x=1}^2 \frac{1}{2}\sqrt{9x-5} dx = \frac{1}{18}\int_{t=4}^{13} t^{\frac{1}{2}} dt = \ldots = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right)$$

b) (12 točk) Ali obstaja kateri od integralov

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx \quad \text{ali} \quad \int_2^\infty \frac{1}{f(x)} dx?$$

Če obstaja, ga izračunaj.
Rešitev : Nedoločeni integral funkcije $1/f(x)$ je enak

$$F(x) = \int \frac{1}{f(x)} dx = \int (x-1)^{-3/2} dx = -2(x-1)^{-\frac{1}{2}} + C$$

Za posplošena integrala dobimo

$$\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = F(2) - \lim_{x \downarrow 1} F(x) = -2 + \lim_{x \downarrow 1} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

in

$$\int_2^\infty \frac{1}{f(x)} dx = \lim_{x \to \infty} F(x) - F(2) = -\lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x-1}} + 2 = 2$$