2. izpit iz teorije iz Osnov matematične analize – Rešitve

2. 2. 2022

Prvi sklop

Pri naslednjih nalogah obkroži le **en** odgovor. Pravilen odgovor pri vsaki nalogi prinese 3 točke, napačen pa -1 točko. Neodgovorjena naloga (ali prečrtan odgovor) prinese 0 točk.

1. Denimo, da ima kompleksno število w absolutno vrednost 2 in argument $\frac{\pi}{7}$. Kompleksne rešitve enačbe $z^3 = w^2$ so potem:

   (a) $z_k = \sqrt{8}\, e^{i\cdot\frac{\frac{3\pi}{7}+2k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2$,

   (b) $z_k = \sqrt{8}\, e^{i\cdot\frac{\frac{3\pi}{7}+k\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2$,

   (c) $z_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\cdot\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$,

   (d) $z_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\cdot\frac{\frac{2\pi}{7}+k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

   Rešitev: Ker je $w^2 = (2e^{i\cdot\frac{\pi}{7}})^2 = 4e^{i\cdot\frac{2\pi}{7}}$, so rešitve enačbe $z^3 = w^2$ natanko $z_k = \sqrt[3]{4}\, e^{i\cdot\frac{\frac{2\pi}{7}+2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$ (odgovor (c)).

2. Če je zaporedje $a_1, a_2, a_3, \dots$ konvergentno z limito 5, potem je zaporedje kvadratov $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots$

   (a) konvergentno z limito 25,

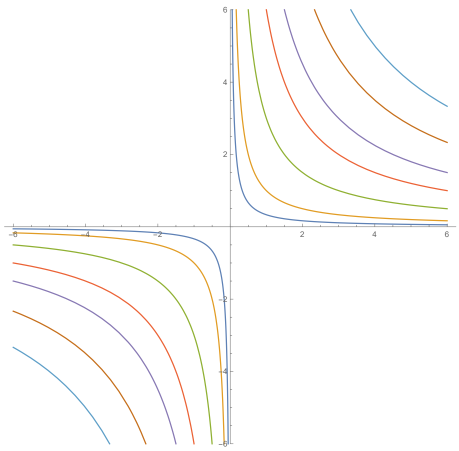
   (b) konvergentno z limito 0,

   (c) konvergentno z limito $\sqrt{5}$,

   (d) ni nujno konvergentno, odvisno je od primera.

   Rešitev: Uporabimo formulo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2$ (ali $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$) in dobimo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^2 = 5^2 = 25$ (odgovor (a)).

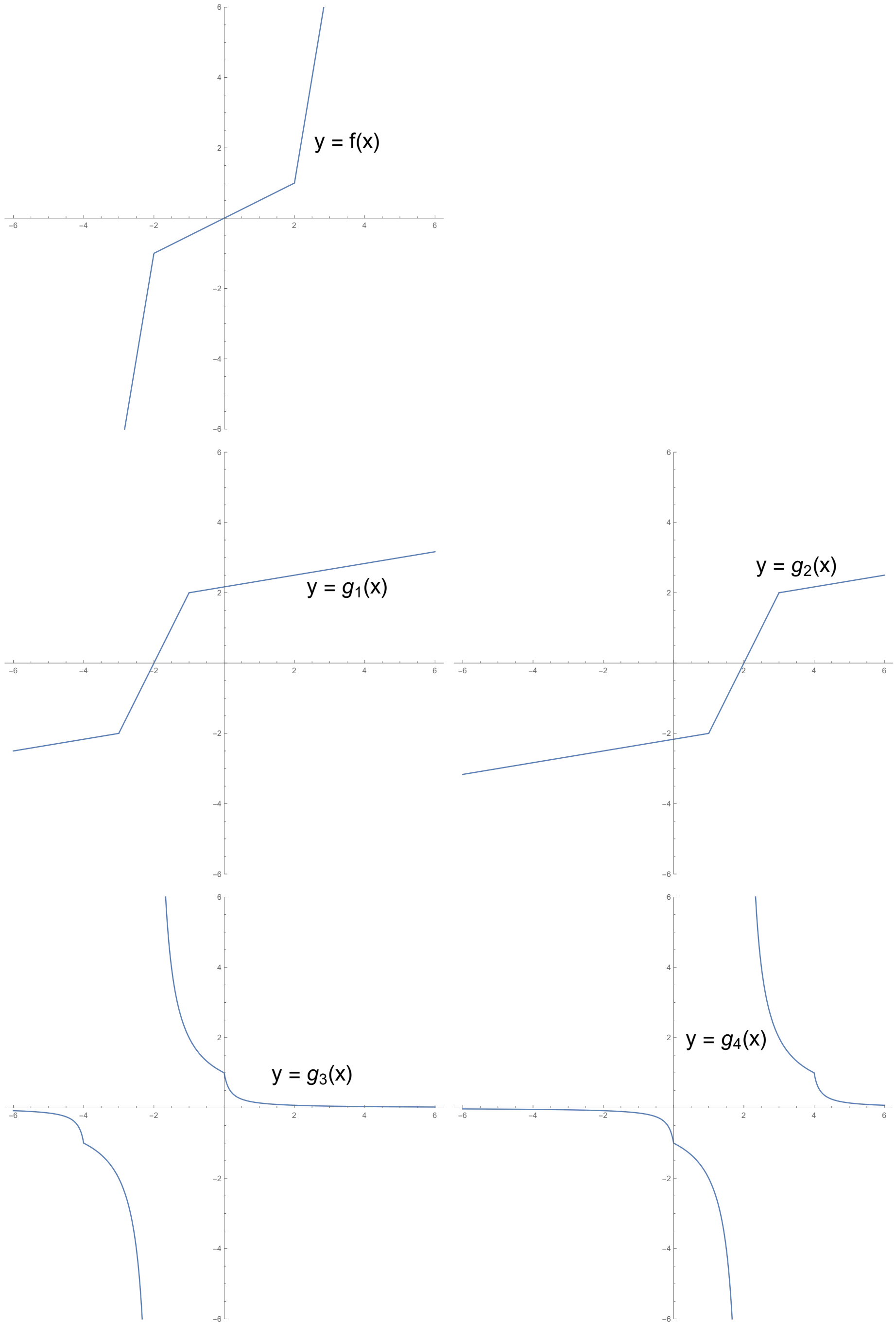
3. Nivojnice katere funkcije dveh spremenljivk so prikazane na spodnji sliki?

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = x + y$ (c) $f(x, y) = xy$ (d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

   Rešitev: Nivojnice so krivulje z enačbo $f(x, y) = C$. Pri točki (a) dobimo $x^2 + y^2 = C$, torej krožnice. Pri točki (b) dobimo $x + y = C$ oziroma $y = C - x$, torej premice. Pri točki (d) dobimo $\frac{x}{y} = C$ oziroma $y = \frac{x}{C}$, torej prav tako premice. Pri točki (c) pa dobimo $xy = C$ oziroma $y = \frac{C}{x}$, torej hiperbole. Pravi odgovor je torej (c).

4. Na spodnjih slikah so prikazani grafi funkcij f, g_1, g_2, g_3 in g_4.



Katera od funkcij g_1, g_2, g_3, g_4 je enaka $f^{-1}(x-2)$?

(a) g_1 (b) g_2 (c) g_3 (d) g_4

Rešitev: Graf funkcije $f^{-1}(x)$ je enak grafu funkcije f, zrcaljenemu čez simetralo lihih kvadrantov. Če želimo dobiti graf $f^{-1}(x-2)$, moramo ta graf vzporedno premakniti še za 2 v desno. Pravi odgovor je torej (b).

5. Kateri od spodnjih izrazov predstavlja primer Riemannove vsote za integral funkcije $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$?

(a) $0.1^2 + 0.4^2 + 0.9^2$

(b) $0.1^2 \cdot 0.3 + 0.4^2 \cdot 0.5 + 0.9^2 \cdot 0.2$

(c) $0.3^2 \cdot 0.1 + 0.5^2 \cdot 0.4 + 0.2^2 \cdot 0.9$

(d) $0.3^2 \cdot 0.3 + 0.5^2 \cdot 0.5 + 0.2^2 \cdot 0.2$

Rešitev: Riemannova vsota je izraz $f(c_1) \cdot \delta_1 + f(c_2) \cdot \delta_2 + \cdots + f(c_n) \cdot \delta_n$, kjer so δ_i dolžine intervalov, ki morajo v tem primeru skupaj tvoriti interval $[0, 1]$, c_i pa so točke na teh intervalih. Edini smiselni odgovor med navedenimi je zato samo (b), ki ponazarja Riemannovo vsoto glede na delitev intervala $[0, 1]$ na podintervale $[0, 0.3]$, $[0.3, 0.8]$ in $[0.8, 1]$ z vmesnimi točkami $c_1 = 0.1$ na prvem intervalu, $c_2 = 0.4$ na drugem intervalu in $c_3 = 0.9$ na tretjem intervalu.

Drugi sklop

V spodnjih nalogah obkroži pravilni odgovor (pravilen je le en odgovor). Odgovor kratko utemelji (v enem stavku). Napačen odgovor ne prinaša negativnih točk, vsak pravilen odgovor pa je skupaj z utemeljitvijo vreden 2 točki.

1. Če za člene zaporedja (a_n) velja $\frac{1}{2n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ za vsak $n \geq 1$, potem je zaporedje (a_n)

   (a) konvergentno,
   (b) divergentno,
   (c) lahko konvergentno ali divergentno (ni dovolj podatkov).

   Utemeljitev:

   Rešitev: Ker sta $\frac{1}{2n}$ in $\frac{1}{n}$ konvergentni zaporedji, ki imata *enaki limiti* (obe limiti sta 0), je po izreku o sendviču $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Torej je pravi odgovor (a).

2. Če za člene zaporedja (a_n) velja $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ za vsak $n \geq 1$, potem je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

   (a) konvergentna,
   (b) divergentna,
   (c) lahko konvergentna ali divergentna (ni dovolj podatkov).

   Utemeljitev:

   Rešitev: Če bi bila vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonična vrsta) konvergentna, bi bila po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna. Ker pa je harmonična vrsta divergentna, nam primerjalni kriterij ne da odgovora. Zlahka najdemo primer, ko je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna in ko je divergentna. Na primer, če je zaporedje a_n ničelno zaporedje (vsi členi so 0), je vrsta konvergentna, če pa je $a_n = \frac{1}{n}$ (kar še vedno zadošča $a_n \leq \frac{1}{n}$), pa je divergentna. Pravi odgovor je tako (c).

3. Nedoločeni integral funkcije $(x^{-1} - x^{-2})e^x$ je

   (a) $x^{-1}e^x + C$
   (b) $x^{-2}e^x + C$

   Utemeljitev:

   Rešitev: Najlažja pot do pravega odgovora je, če odvajamo obe funkciji v odgovorih in pogledamo, kateri odvod je enak funkciji v nalogi. Ker je $(x^{-1}e^x + C)' = -x^{-2}e^x + x^{-1}e^x = (x^{-1} - x^{-2})e^x$, je pravi odgovor (a).

   Na težji način se naloge lahko lotimo tudi z integracijo per partes. Če izberemo na primer $u = x^{-1}$ in $dv = e^x dx$, dobimo

   $$\int (x^{-1} - x^{-2})e^x dx = \int x^{-1}e^x dx - \int x^{-2}e^x dx = \left(x^{-1}e^x - \int (-x^{-2})e^x dx\right) - \int x^{-2}e^x dx.$$

   Čeprav drugega in tretjega člena ne znamo izračunati, pa se oba člena pokrajšata. Tako dobimo rešitev $x^{-1}e^x + C$.

4. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija in $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Če je funkcija F povsod naraščajoča, potem je

   (a) funkcija f povsod večja ali enaka 0,
   (b) funkcija f povsod manjša ali enaka 0,
   (c) lahko funkcija f nekje večja od 0 in drugje manjša od 0.

   Utemeljitev:

   Rešitev: Velja zveza $F'(x) = f(x)$. Ker je F naraščajoča, je $F'(x) \geq 0$. Torej je $f(x) \geq 0$ in je pravi odgovor (a).

Tretji sklop

1. (2 točki) Napiši Taylorjevo vrsto za funkcijo $f(x) = \sin(x^3)$ okrog točke 0.

   Rešitev: Naloga nas sprašuje po Taylorjevi vrsti in ne Taylorjevem polinomu (čeprav si lahko pomagamo tudi s slednjim). Pomagamo si z razvojem funkcije $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$. Ta enakost velja za vse realne vrednosti x. Ko namesto x pišemo x^3, dobimo

   $$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} \mp \cdots .$$

   To rešitev lahko dobimo tudi z odvajanjem, vendar bodo višji odvodi funkcije $\sin(x^3)$ hitro postali komplicirani, pri $x = 0$ pa bodo skoraj vsi enaki 0. (Neničelni bodo le 3. odvod, 9. odvod, 15. odvod itd.)

2. (2 točki) Poišči primer funkcije treh spremenljivk $f(x, y, z)$, ki ima gradient v točki $(1, 1, 1)$ enak $\nabla f(1, 1, 1) = (-2, 1, 0)$.

   Rešitev: Takšna funkcija je na primer $f(x, y, z) = -2x + y$. (Njen gradient je celo konstantno enak $(-2, 1, 0)$.)

3. Naj bosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji.

   (a) (2 točki) Če je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, kateri pogoj zagotavlja, da je potem tudi $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$?

   (b) (1 točka) Poišči primer, ko je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, limita $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ pa ne obstaja.

   Rešitev: (a) Po L'Hospitalovem pravilu je pogoj, ki zagotavlja enakost limit, naslednji:

   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{ali} \quad \lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to\infty} g(x) \in \{\infty, -\infty\}.$$

   (b) Takšni funkciji sta na primer $f(x) = 1 + e^{-x}$ in $g(x) = e^{-x}$. Ker imata enak odvod, je seveda $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$. Ker pa je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, pa je $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{1}{0}$ (limita ne obstaja).