Ime in priimek

Osnove matematične analize: drugi kolokvij

10. januar 2022

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami in navadnega kalkulatorja. Uporaba grafičnega kalkulatorja ali drugih pripomočkov ni dovoljena. Vse odgovore dobro utemelji! **Vsako nalogo piši na svojo stran. Če ne rešuješ na izpitno polo, se na vsak list zgoraj podpiši, navedi številko naloge ter naloge skeniraj po vrsti. Hvala!**

1. naloga (25 točk)

Podana je funkcija

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}.$$

a) (9 točk) Zapiši enačbo tangente na graf dane funkcije v točki $T(x_0, -1)$.
Rešitev : Najprej rešimo enačbe $f(x_0) = -1$ oz.

$$\frac{x_0 - 3}{x_0 + 1} = -1$$

Dobimo $x_0 = 1$. Odvod funkcije f (po poenostavitvi) je

$$f'(x) = \frac{4}{(1+x)^2}$$

Smerni koeficient tangente je tako

$$k_T = f'(1) = 1$$

enačba tangente pa

$$y = x - 2$$

b) (9 točk) V katerih točkah je normala na graf funkcije f vzporedna premici $x + y = 2$.
Rešitev : Poiskati je potrebno točke, kjer za smerni koeficient normale velja

$$k_N = -\frac{1}{f'(x)} = -1$$

Rešitvi enačbe

$$-\frac{(1+x)^2}{4} = -1$$

sta $x_{1,2} = -1 \pm 2$.

c) (7 točk) Za katero vrednost parametra a je tangenta na graf v točki $T(x_0, -1)$ tudi tangenta parabole $y = ax^2 - (a+1)x$?
Rešitev : Odvod parabole je

$$y'(x) = 2ax - (a+1)$$

Veljati mora

$$f'(1) = y'(1)$$

ali

$$1 = 2a - (a+1)$$

Rešitev je $a = 2$.

2. naloga (25 točk)

Podana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

a) (5 točk) Določi definicijsko območje funkcije $f(x,y)$.
Rešitev : Funkcija je definirana za vse $x, y \in \mathbb{R}$.

b) (5 točk) Skiciraj nivojnice funkcije $f(x,y)$.
Rešitev : Enačbe nivojnic so oblike

$$x^2 + y^2 = c \geq 0$$

kar pomeni, da dobimo krožnice v središčni legi.

c) (15 točk) Med točkami (x,y) v ravnini, ki zadoščajo zvezi $x + 2y = 1$ poišči tiste, za katere je $f(x,y)$ najmanjša. Rezultat geometrijsko interpretiraj.
Rešitev : Če iz enačbe $x + 2y = 1$ izrazimo

$$y = \frac{1-x}{2}$$

lahko iščemo ekstrem funkcije

$$g(x) := f(x, \frac{1-x}{2}) = x^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

Lahko pa tudi rešujemo problem vezanih ekstremov z Lagrangeovo funkcijo

$$L(x,y,\lambda) := x^2 + y^2 - \lambda(x + 2y - 1)$$

V prvem primeru rešujemo enačbo

$$g'(x) = 2x - \frac{1-x}{2} = 0$$

v drugem primeru pa sistem enačb

$$\begin{aligned} L_x &= 2x - \lambda = 0 \\ L_y &= 2y - 2\lambda = 0 \\ L_\lambda &= -(x + 2y - 1) = 0 \end{aligned}$$

V vsakem primeru dobimo rešitev $x = \frac{1}{5}$, $y = \frac{2}{5}$. Funkcije f izračuna kvadrat razdalje točke s koordinatami (x,y) od izhodišča $(0,0)$, kar pomeni, da je $T(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ tista točka na premici za enačbo $x + 2y = 1$, ki je najbližja izhodišču koordinatnega sistema.

3. naloga (25 točk)

Naj bo

$$f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2$$

a) (5 točk) Izračunaj gradient funkcije f.
Rešitev :

$$\operatorname{grad} f\ (x,y) = \begin{bmatrix} 6xy - 6x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y \end{bmatrix}$$

b) (8 točk) Določi vse stacionarne točke funkcije f.
Rešitev : Enačba $f_x = 0$ je ekvivalentna enačbi

$$x(y-1) = 0$$

Dobimo dve možnosti, $x = 0$ ali $y = 1$.
Za $x = 0$ se enačba $f_y = 0$ poenastavi v

$$3y^2 - 6y = 0$$

ki ima rešitvi $y = 0$ in $y = 2$.
Za $y = 1$ enačba $f_y = 0$ postane

$$3x^2 - 3 = 0$$

ki ima rešitvi $x = -1$ in $x = 1$.
Skupaj imamo torej 4 stacionarne točke $T_1(0,0)$, $T_2(0,2)$, $T_3(-1,1)$ in $T_4(1,1)$.

c) (4 točke) Izračunaj Hessejevo matriko funkcije f.
Rešitev : Drugi odvod je

$$\operatorname{Hess} f\ (x,y) = \begin{bmatrix} 6y-6 & 6x \\ 6x & 6y-6 \end{bmatrix}$$

d) (8 točk) Klasificiraj vse stacionarne točke funkcije f.
Rešitev : Vrednosti Hessejeve matrike za stacionarne točke so

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} f\ (T_1) &= \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \\
\operatorname{Hess} f\ (T_2) &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\
\operatorname{Hess} f\ (T_3) &= \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \\
\operatorname{Hess} f\ (T_4) &= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Determinanti matrik Hess $f(T_3)$ in Hess $f(T_4)$ sta enaki -36, kar pomeni, da sta T_3 in T_4 sedli.
Determinanti matrik Hess $f(T_1)$ in Hess $f(T_2)$ sta enaki 36, kar pomeni, da sta T_1 in T_2 lokalna ekstrema. Ker je $f_{xx}(T_1) < 0$, je T_1 lokalni maksimum, in ker je $f_{xx}(T_2) > 0$, je T_2 lokalni minimum.

4. naloga (25 točk)

Dani sta funkciji f in g

$$f(x) = x\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right), \quad g(x) = x\cos(x^2)$$

a) (13 točk) Izračunaj nedoločena integrala $\int f(x)dx$ in $\int g(x)dx$.
Rešitev : Nedoločena integrala sta

$$\int f(x)dx = \int x\left(x - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)dx = \int x^2 - x\sqrt{\frac{\pi}{2}}dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} + C$$

$$\int g(x)dx = \int x\cos(x^2)dx = \int \cos(t)\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\sin(t) + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

kjer smo uporabili zamenjavo spremenljivke

$$\begin{aligned} t &= x^2 \\ dt &= 2xdx \end{aligned}$$

b) (6 točk) Določi najmanjšo strogo pozitivno ničlo funkcije g. Imata f in g kakšne skupne ničle?
Rešitev : Najmanjša strogo pozitivna ničla funkcije $\cos(t)$ je $t = \frac{\pi}{2}$, torej ima $\cos(x^2)$ (in s tem g) najmanjšo strogo pozitivno ničlo pri $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ki je hkrati ničla funkcije f. Funkcija f in g imata skupno ničlo tudi pri $x = 0$.

c) (6 točk) Izračunaj ploščino omejenega območja med grafoma funkcij f in g. (Pri določanju intervala integriranja si pomagaj s prejšnjo točko.)
Rešitev : Glede na prejšnjo točko, se f in g sekata pri $x = 0$ in $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ker imata tam obe funkciji vrednost 0. Opazimo tudi, da za vse $x \in (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ velja $f(x) < 0$ ter $g(x) > 0$. Ploščino omejenega območja med grafoma lahko torej dobimo kot

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} g(x) - f(x)dx = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - (0+0) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{24}$$