1. Naj bo $\mathcal{G}$ družina grafov na sedmih vozliščih, ki imajo 2 vozlišči stopnje 3 in ostale stopnje 2.

   (a) Poišči nepovezan graf v množici $\mathcal{G}$.

   (b) Poišči povezan graf v $\mathcal{G}$, ki ima Hamiltonov cikel in povezan graf, ki nima Hamiltonovega cikla.

   (c) Poišči dva neizomorfna grafa v $\mathcal{G}$, ki nimata Hamiltonovih ciklov.

$\mathcal{G} = \{ G \,;\, |V(G)| = 7,$ stopnje vozlišč: $3,3,2,2,2,2,2 \}$

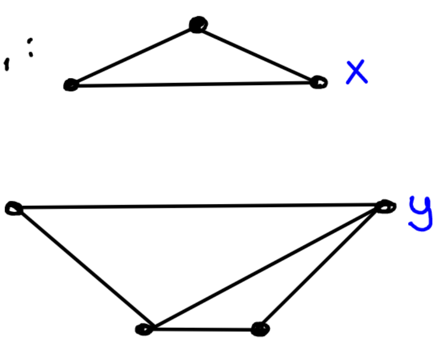
Lema o rokovanju:

$3+3+2+2+2+2+2 = 2 \cdot |E(G)|$

$16 = 2 \cdot |E(G)| \;/:2$

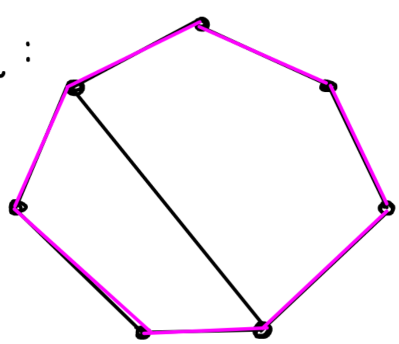
$|E(G)| = 8$

a) G_1:

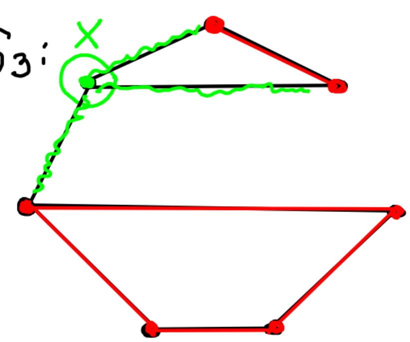


G_1 ni povezan, saj med vozliščema x in y ni poti.

b) G_2:



G_3:



G_2 je Hamiltonov, saj vsebuje Hamiltonov cikel (na sliki).

$S = \{x\}, \; |S| = 1$

$G_3 - S$ vsebuje 2 povezani komponenti

$\|$

$\Downarrow$

G_3 ni Hamiltonov

c) $G_1 \not\cong G_3$, saj G_1 ni povezan,
G_3 pa je povezan

G_3 ni Hamiltonov (od prej)
G_1 ni Hamiltonov, saj ni povezan

Barvanje vozlišč grafa

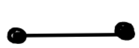
k-barvanje vozlišč grafa G je preslikava $c: V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$, za katero velja, da poljubni sosednji vozlišči prejmeta različni barvi.

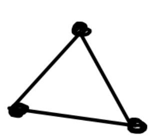
Kromatično število grafa G (oznaka: $\chi(G)$) je najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje vozlišč grafa G.

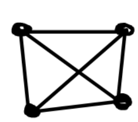
IZREK: $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

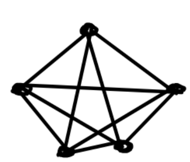
$\omega(G)$ ↑ velikost največje klike v grafu G
$\quad\;\;$ ||
velikost največjega polnega podgrafa v G

$\Delta(G)$ ↑ največja stopnja v G

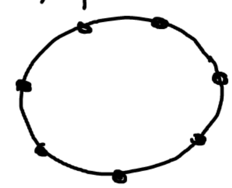
K_2:


K_3:


K_4:


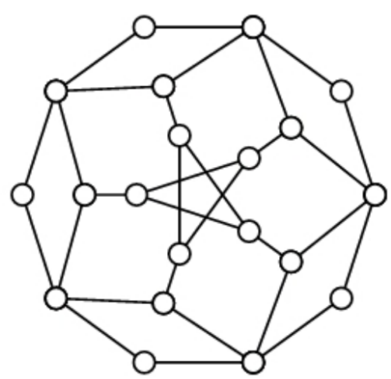
K_5:


IZREK (Brooks): Če je G povezan graf, ki ni polni graf niti lihi cikel, potem
$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

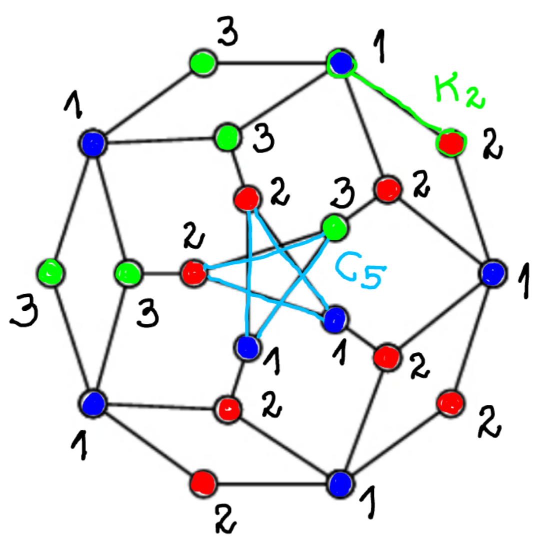


G je dvodelen $\Leftrightarrow \chi(G) = 2$.

2. (a) Določi kromatično število grafa na sliki.
   (b) Ali je Hamiltonov? Če je, potem nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, pa to pokaži z izrekom o razpadu grafa.



a)



$\omega(G) = 2$
$\Delta(G) = 4$

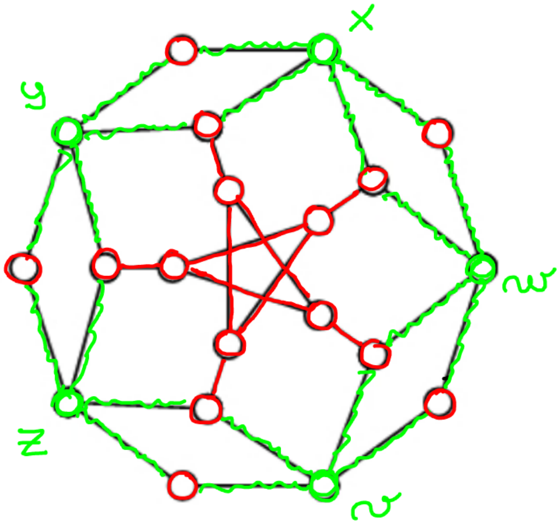
$$\underset{\omega(G)}{2} \leq \chi(G) \leq \underset{\Delta(G)}{4}$$

Brooks

$\chi(G) \neq 2$, saj G ni dvodelen - vsebuje lihi cikel C_5 (zanj potrebujemo vsaj 3 barve).

Našli smo 3-barvanje. Zato $\chi(G)=3$.

b)



$S=\{x,y,z,v,w\}$

$|S|=5$

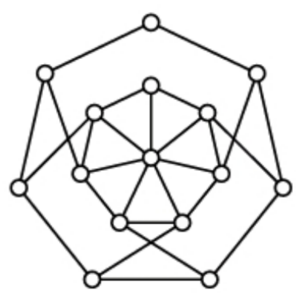
$G-S$ ima 6 povezanih komponent

$\Downarrow$

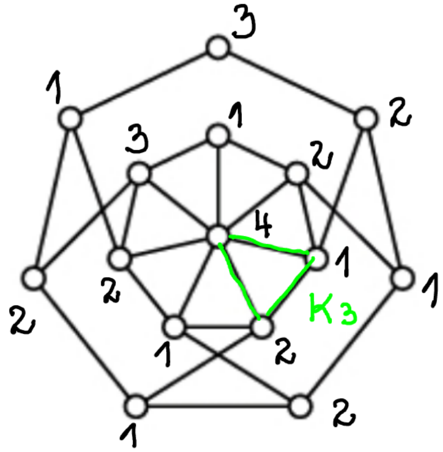
Izrek o razpadu grafa:

G ni Hamiltonov

3. (a) Določi kromatično število grafa na sliki.
   (b) Ali je Eulerjev?
   (c) Ali je Hamiltonov?



a)



$\omega(G)=3$

$\Delta(G)=7$

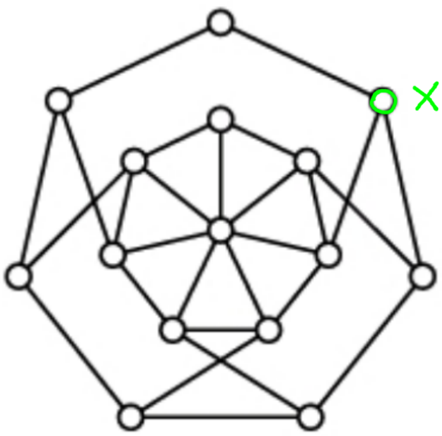
$$\underset{\omega(G)}{3} \leq \chi(G) \leq \underset{\Delta(G)}{7}$$

Brooks

3-barvanje ne obstaja, saj graf vsebuje lihi cikel C_7 (za njegovo barvanje potrebujemo 3 barve) in vozlišče zunaj cikla, ki je povezano z vsemi vozlišči na ciklu. Za barvanje tega vozlišča zato potrebujemo četrto barvo.

Ker smo našli 4-barvanje (na sliki), je $\chi(G)=4$.

b)

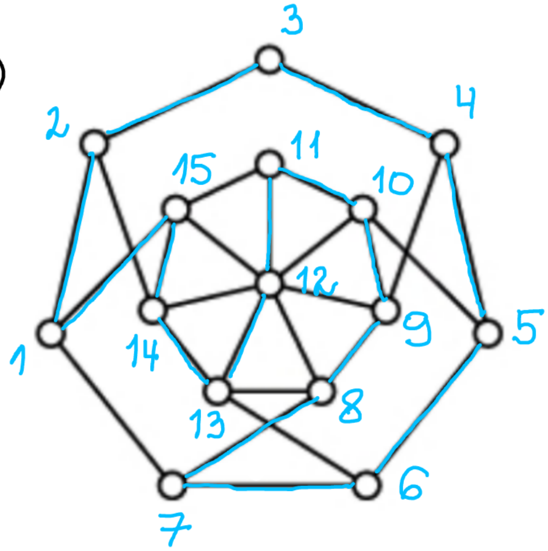


$\deg(x) = 3$

$\downarrow$

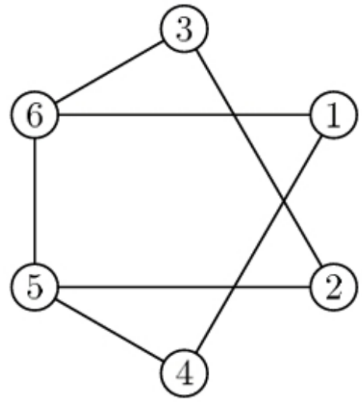
Ker G vsebuje vozlišče x lihe stopnje (3), G ni Eulerjev.

c)



Graf je Hamiltonov, saj vsebuje Hamiltonov cikel (na sliki).

4. Podan imamo spodnji graf G.



(a) Graf G pobarvaj z uporabo požrešne metode za označeni vrstni red oglišč.

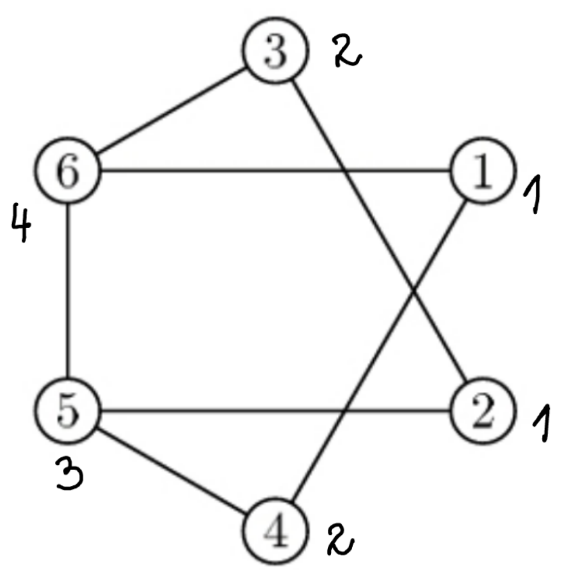
(b) Graf G pobarvaj z uporabo požrešne metode, pri čemer zamenjaj vrstni red oglišč 4 in 6.

(c) Določi takšen vrstni red oglišč, da bomo z uporabo požrešne metode dobili barvanje z $\chi(G)$ barvami.

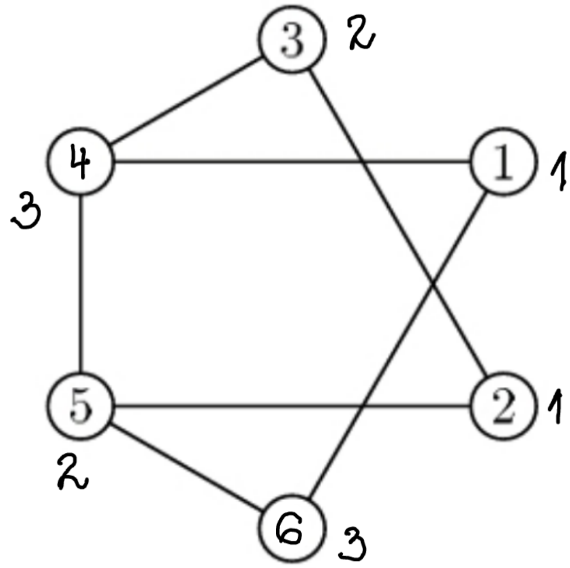
Požrešna metoda barvanja vozlišč:

Vozlišča pobarvamo v označenem vrstnem redu tako, da vsakemu vozlišču dodelimo najmanjšo možno barvo, ki mu jo še lahko, ko je na vrsti, da ga pobarvamo.

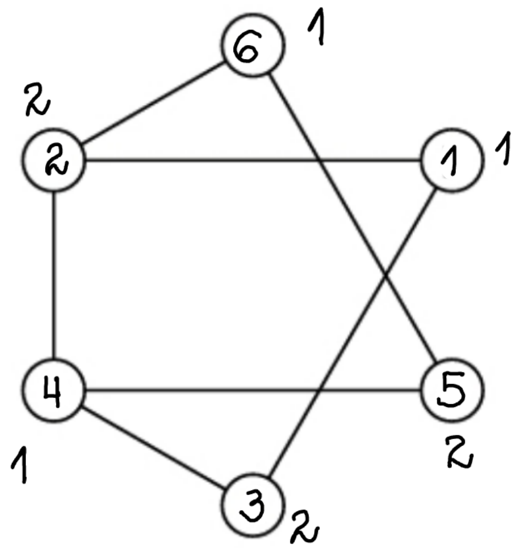
a)



b)

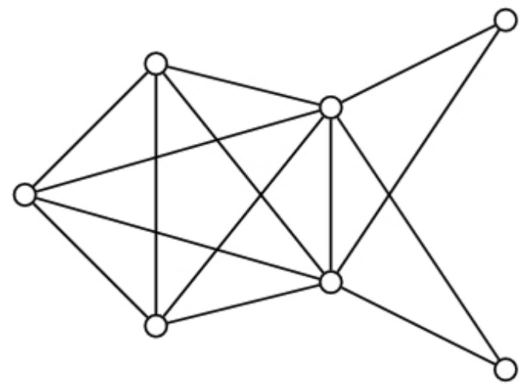


c)



$\chi(G) = 2$,
saj smo našli
2-barvanje
(graf je
dvodelen).

5. Podan je graf na sliki.

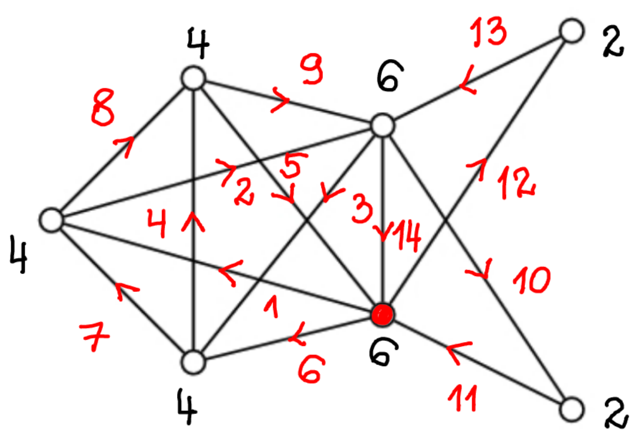


(a) Ali je ta graf Eulerjev? Če je, potem označi Eulerjev obhod. Če ni, pa to dobro utemelji.

(b) Ali je ta graf Hamiltonov? Če je, potem nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, pa to pokaži z izrekom o razpadu grafa.

(c) S pomočjo velikosti največje klike ter Brooksovega izreka določi kromatično število tega grafa.

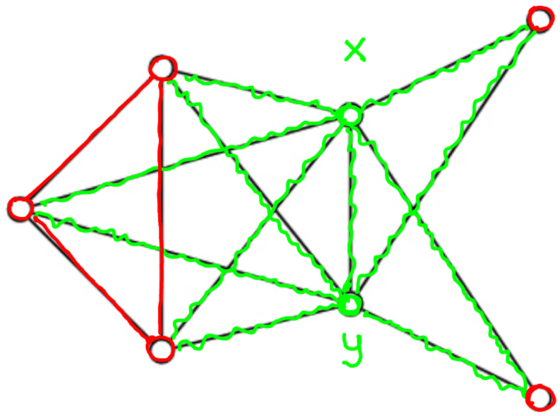
a)



Graf je povezan in ima vsa vozlišča sodih stopenj, zato je Eulerjev.

Graf je Eulerjev, saj vsebuje Eulerjev obhod (na sliki).

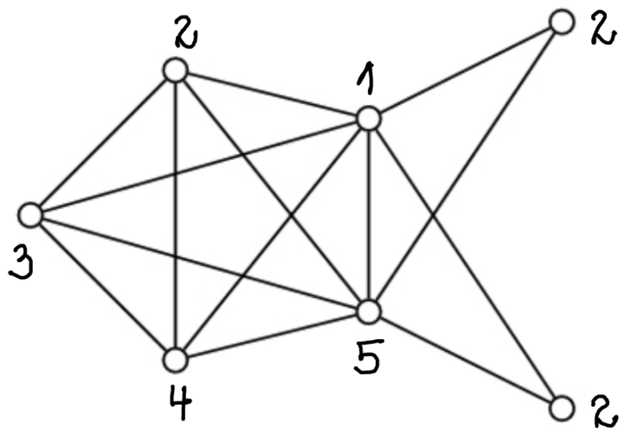
b)



$S = \{x, y\}$, $|S| = 2$

$G - S$ vsebuje 3 povezane komponente } Izrek o razpadu grafa: G ni Hamiltonov

c)



$$\left.\begin{array}{l}\omega(G) = 5\\ \Delta(G) = 6\end{array}\right\} \quad \underset{\omega(G)}{5} \leq \chi(G) \underset{\text{Brooks}}{\leq} \underset{\Delta(G)}{6}$$

Našli smo 5-barvanje (na sliki), zato je $\chi(G) = 5$.