Diskretne Strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

10. januar 2022

Od zadnjič

- Podgrafi.
- Sprehodi, povezanost.
- Dvodelni grafi.
- Eulerjevi grafi.
- Drevesa in gozdovi.

Hamiltonovi grafi

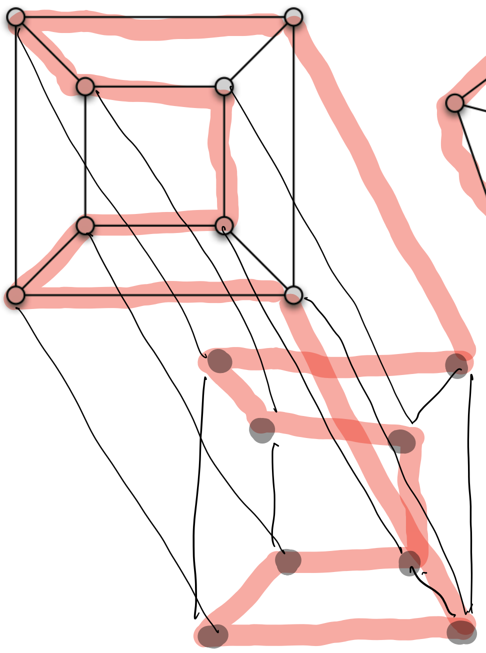
Cikel v grafu G je *Hamiltonov*, če vsebuje vse točke grafa G.

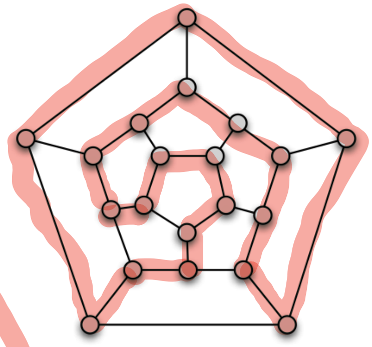
Cikel v grafu vsebuje vsaj 3 točke in gre skozi posamezno točko grafa največ enkrat. Hamiltonov cikel gre skozi vsako točko natančno enkrat.

Če se spomnimo Eulerjevega obhoda, to je *obhod*, ki gre po vsaki povezavi natančno enkrat.

Graf G je *Hamiltonov*, če vsebuje kak Hamiltonov cikel.

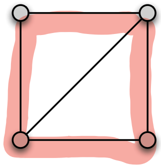
Zgledi

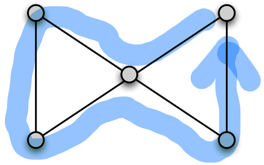




Zgledi

Kakšna je zveza med Hamiltonovimi in Eulerjevimi grafi?





Eulerjev in Hamiltonov problem nista povezana.

Ni Eulerjev.

Ni Hamiltonov.

Kako prepoznati Hamiltonove grafe

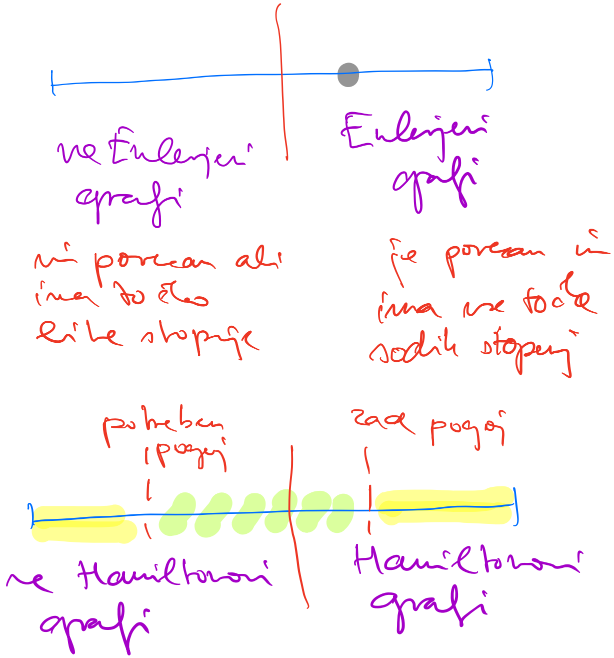
Hamiltonov problem je mnogo težji kot Eulerjev.

Ne obstaja enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov.

To pomeni naslednje:

- Pokazati, da je graf G Hamiltonov je *relativno enostavno*. Potrebno je samo poiskati Hamiltonov cikel.
- Pokazati, da graf G ni Hamiltonov je *zelo težavno*. V splošnem je potrebno pregledati vse cikle v grafu, če se slučajno nekje med njimi ne skriva kakšen Hamiltonov nepridiprav.

Spoznali bomo en *potreben pogoj*, da je graf Hamiltonov in en *zadosten pogoj*, da je graf Hamiltonov.



Potrebni pogoj z razpadom grafa

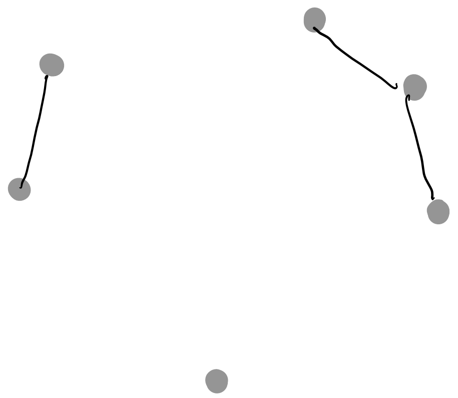
Izrek

Naj bo G povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$, za katero velja, da ima

$$G - S$$

vsaj $k+1$ povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

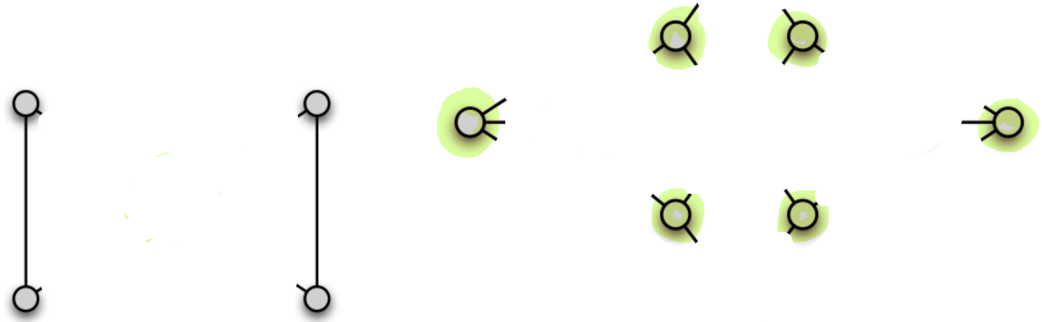
Komentar: Pogoj, da v grafu takšna množica S ne obstaja, je *potreben*.
To pomeni, da Hamiltonov graf zadošča temu pogoju (tj. ne razpade preveč).
Toda če graf pogoju zadošča (ne razpade), to še ne pomeni, da je Hamiltonov.



Na koliko komponent razpade Hamiltonov graf, če iz njega odstranim k točk.

# odstranjenih točk	0	1	2	3	4	...	k
# komponent	1	1	≤ 2	≤ 3	≤ 4	...	$\leq k$

Zgledi



"prerez razpade"

Odstranil 1 točko in dobil 2 komponenti.

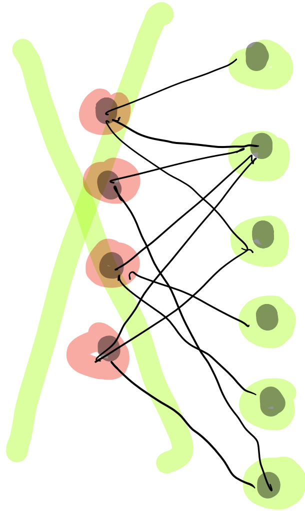
Odstranim 5 rdečih točk, dobim 6 komponent – izolirane točke.

Razpad v dvodelnih grafih

Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

Posledica

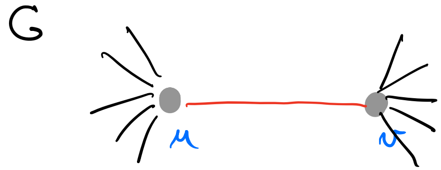
Naj bo G dvodelen graf z barvnima razredoma V_1 in V_2.
($V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 je množica 'belih', V_2 množica 'črnih' točk.)
Če je $|V_1| \neq |V_2|$, potem G ni Hamiltonov.



Diracov zadostni pogoj

Izrek (Bondy in Chvátal)

Naj bosta u in v nesosedi v grafu G in naj zanju velja $\deg(u) + \deg(v) \geq |V(G)|$. *Potem je graf $G + uv$ Hamiltonov natanko tedaj, ko je G Hamiltonov.*



G+uv

\# točk

$\deg(u) + \deg(v) \geq n$

Dokaz. Privzamemo

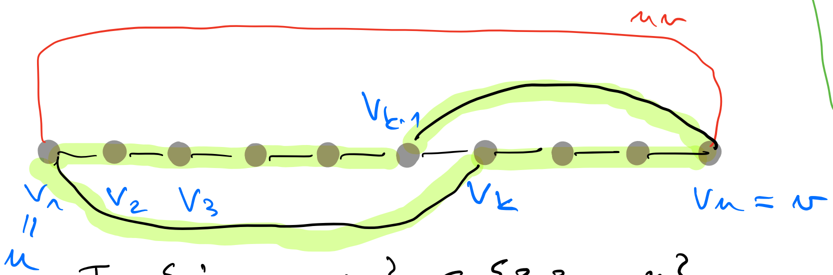
- G nima Hamiltonovega cikla
- u, v nesosedi, $\deg(u)+\deg(v) \geq n$
- $G+uv$ ima Hamiltonov cikel

G in $G+uv$ Hamiltonova

G in $G+uv$ ne Hamiltonova.

Dodajanje uv ne ustvari Hamiltonovega cikla.

Vsak Hamiltonov cikel v $G+uv$ uporabi uv.



$I = \{ i \,,\, v_1 \sim v_i \} \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$

$J = \{ j+1 \,,\, v_n \sim v_j \} \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$

neprazen

$k \in I \cap J$

$$n \leq \deg(v_1) + \deg(v_n) = |I| + |J| = |I \cup J| + |I \cap J| \leq n-1 + |I \cap J|$$

Diracov zadostni pogoj

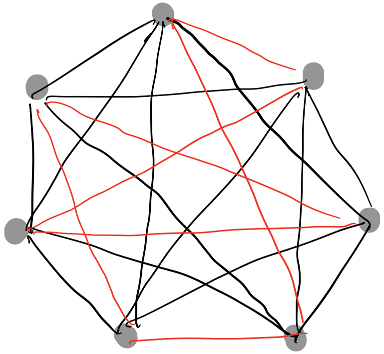
Izrek (Dirac)

Naj bo G graf z vsaj tremi točkami ($|V(G| = n \geq 3$).
Če za vsako točko

$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

potem je graf G Hamiltonov.

Komentar: Pogoj je zadosten. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj tudi Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj.



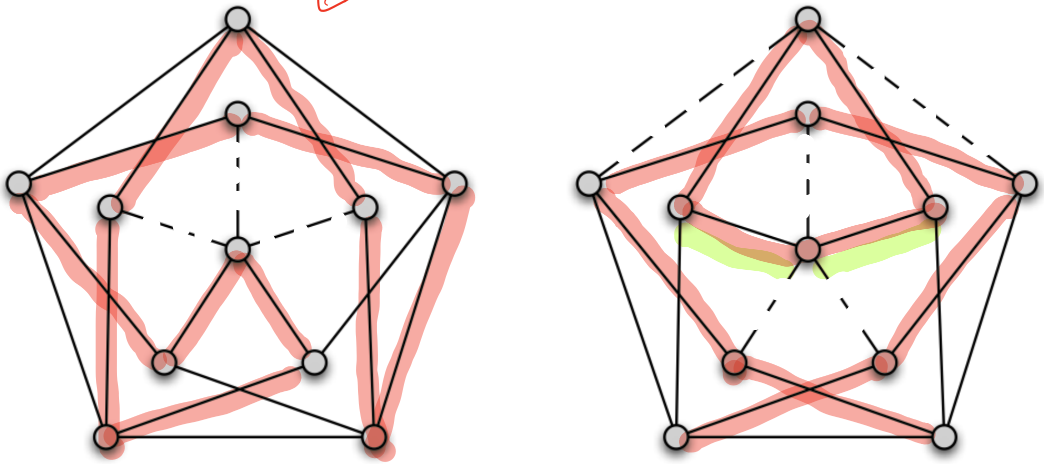
7 točk

4-regularen

Z dodajanjem rdečih povezav dobim poln graf — ta je Hamiltonov.
Tudi originalni graf je (bil) Hamiltonov.

Grötzschev graf

Ali je Hamiltonov? DA



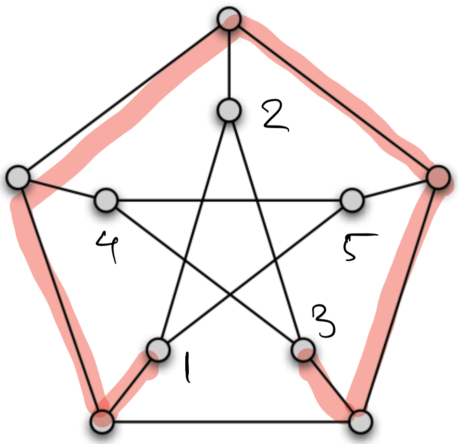
Edini tip Hamiltonovega cikla v Grötzschevem grafu.

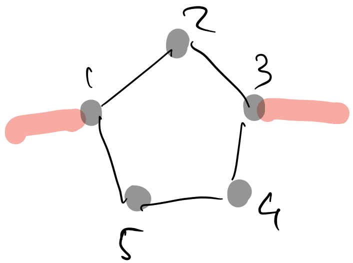
Ima dva tipa simetrij –

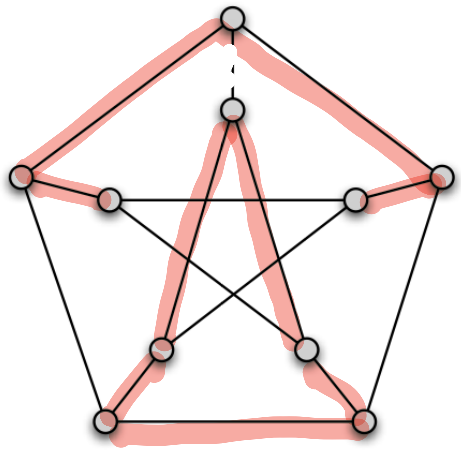
* rotacija za 1/5 polnega kota.
* zrcaljenje preko navpičnice.

Petersenov graf

Ali je Hamiltonov? NE.







Koliko povezav zunanjega cikla uporabi morebitni Hamiltonov cikel?

5 //
4 ✓
3 ✓
2 //

Barvanje grafov

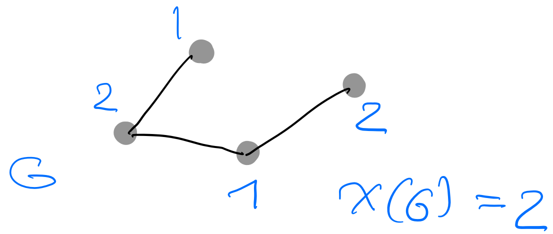
k-barvanje točk grafa G je preslikava

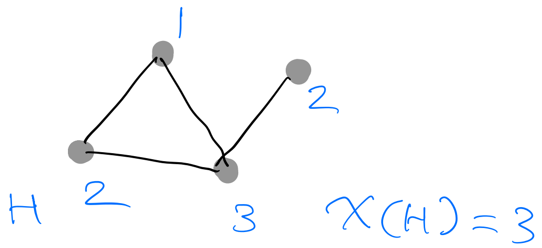
$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih *barv*.

Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo *kromatično število grafa G* in ga označimo s $\chi(G)$.





Zakaj barvanje točk grafa

Problem: Skladiščimo nevarne kemikalije $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$.

Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

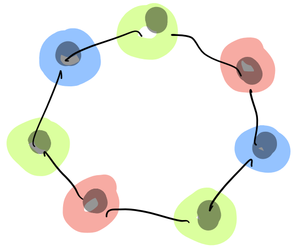
Rešitev:

- Sestavimo graf G s točkami $k_1, \ldots, k_n$.
- Dve točki-kemikaliji sta *sosedi*, če ju ne smemo hraniti v istem prostoru.
- Barve ustrezajo skladiščnim prostorom.
- Iščemo najmanjše potrebno število barv.

Zgledi

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 1$ natanko tedaj, ko je G brez povezav.
3. $\chi(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G dvodelen.
4. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$, $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(T) = 2$, če je T drevo in ima vsaj dve točki.
6. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod}, \\ 3, & n \text{ lih}. \end{cases}$
7. $\chi(Q_d) = 2$, če je $d \geq 1$.

— vsaka točka v svojo barvo
— povezava zahteva 2 barvi
— dvodelnost — 2 barvi na voljo
— ✓
— drevesa so dvodelni grafi



točke Q_d so zaporedja 0/1 dolžine d.

$\boxed{01101}$ — 11101, 00101, 01001, 01111, 01100

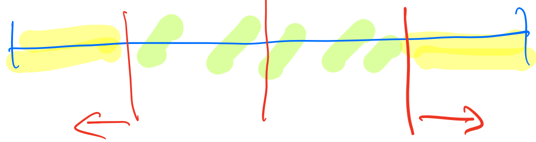
$V(Q_5)$

LIHA točka

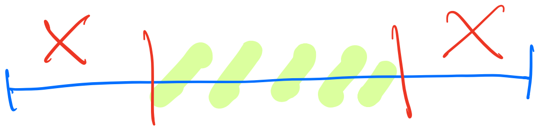
SODE točke

G, $\chi(G) \leq k$

G, $\chi(G) > k$



$k \geq 3$
fiksno št. barv



G
fiksen graf

Zgornja in spodnja meja za $\chi(G)$

$\omega(G)$ je velikost največjega *polnega podgrafa* (tudi *klike*) v G.

$\omega(G) \leq 2$ velja natanko tedaj, ko je G *brez trikotnikov*.

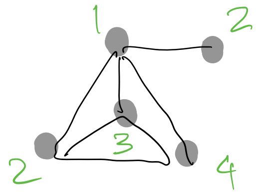
$\Delta(G)$ označuje *največjo stopnjo* točke v grafu G,
z $\delta(G)$ pa označimo *najmanjšo stopnjo* točke grafa G.

Izrek

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

G

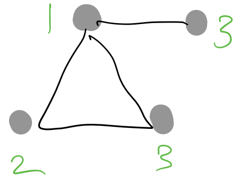
$\chi(G) = 4$



$\omega(G) = 4$
$\Delta(G) = 4$
$\delta(G) = 1$

H

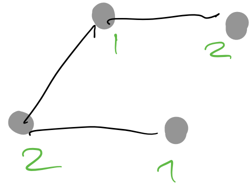
$\chi(H) = 3$



$\omega(H) = 3$
$\Delta(H) = 3$
$\delta(H) = 1$

K

$\chi(K) = 2$



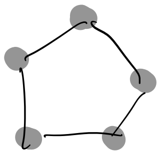
$\omega(K) = 2$
$\Delta(K) = 2$
$\delta(K) = 1$

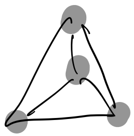
Velja celo boljši rezultat.

Izrek (Brooks)

Naj bo G povezan graf. Če G ni lih cikel *niti* poln graf, *potem je*

$\chi(G) \leq \Delta(G)$

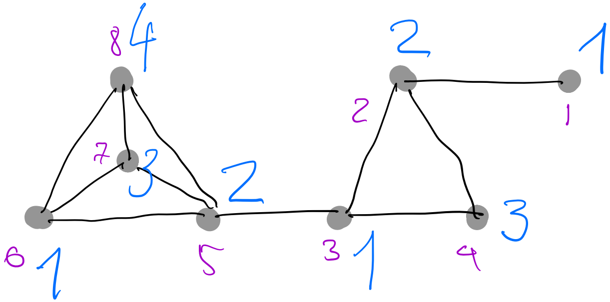




Požrešno barvanje

`požrešnoPobarvaj`(G)

> **če** ima G eno samo točko v, jo obarvaj z barvo 1,
>
> **sicer**
>
> > izberi točko v,
> >
> > `požrešnoPobarvaj`$(G - v)$,
> >
> > obarvaj točko v z najmanjšo barvo, ki je ne uporabijo sosede točke v.



oznake točk (vrstni red)

barve

Požrešno barvanje

`požrešnoPobarvaj`(G)

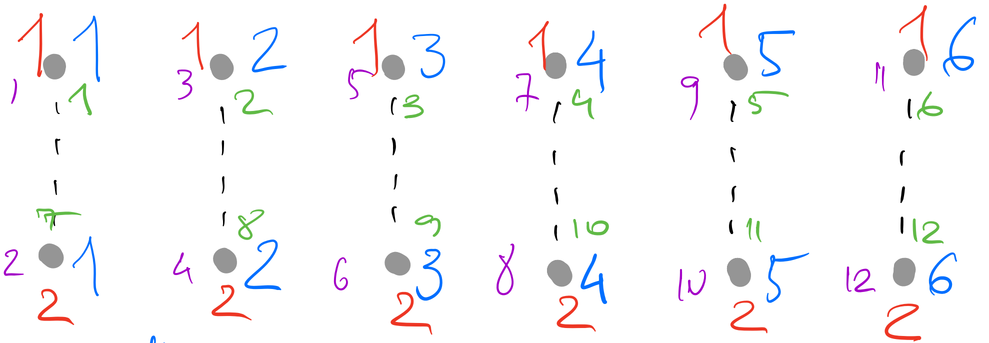
če ima G eno samo točko v, jo obarvaj z barvo 1,

sicer

izberi točko v, ← tisto, ki je najmanjše stopnje v (trenutnem) grafu

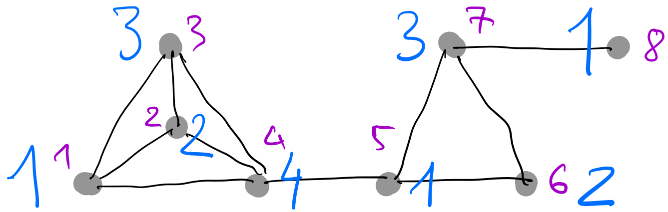
`požrešnoPobarvaj`$(G - v)$,

obarvaj točko v z najmanjšo barvo, ki je ne uporabijo sosede točke v.



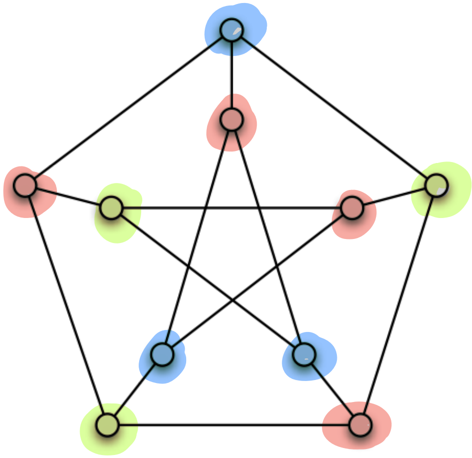
oznake / barve

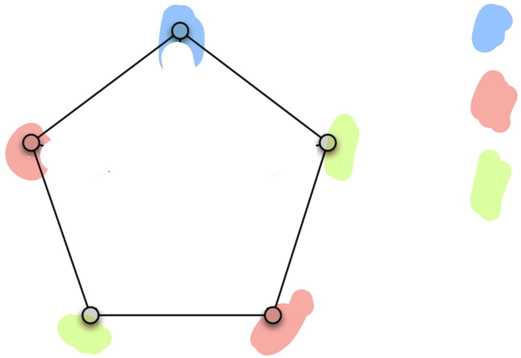
oznake / barve



Petersenov graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?





Na koliko načinov lahko 5-cikel obarvamo s tremi barvami?

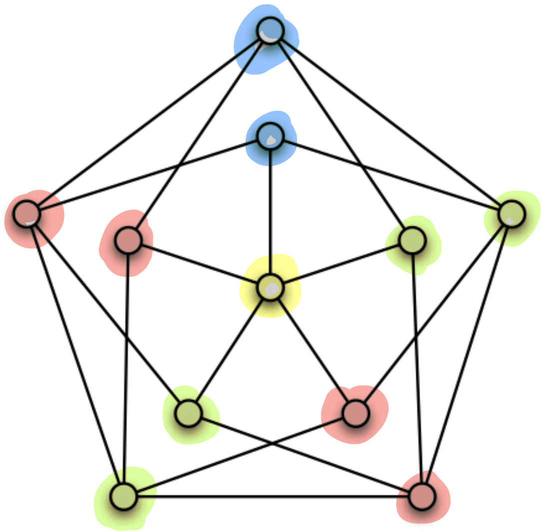
$$\omega(P) = 2 \le \chi(P) \le \Delta(P) = 3$$

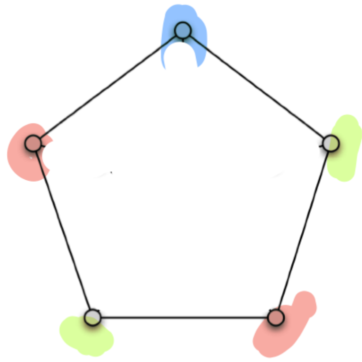
$2 \neq \chi(P)$, ker P ni dvodelen

$\chi(P) = 3$ ✓

Grötzschev graf

Kolikšno je njegovo kromatično število?





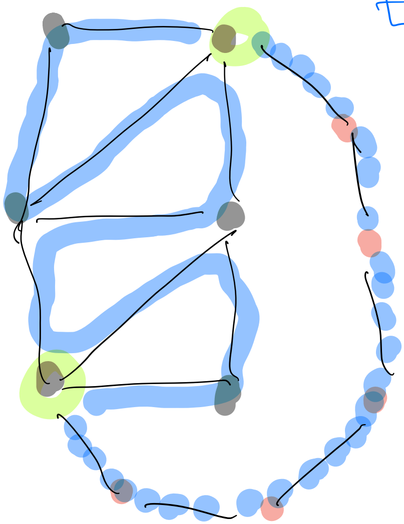
$$\omega(G) = 2 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) = 5$$

$$2 \neq \chi(G)$$

Poskusimo s tremi barvami.

Ne gre. Potrebujemo 4 barve. S 4 barvami gre.

$\chi(G) = 4.$



Eulerjev sprehod ....

sprehod, ki gre po vsaki povezavi natanko enkrat

Hamiltonova pot

pot, ki gre skozi vse točke